Le modèle du tas de sable

Université de Grenoble - Préparation à l'agrégation

Christophe Leuridan

Dans ce texte, nous étudions un modèle introduit par les physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld. L'idée est de rendre compte de la possibilité de cascades de conséquences à partir d'évènements a priori anodins, et qui peuvent, en se coalisant provoquer des changements dramatiques (lorsque le système est à l'état critique).

Ce texte s'inspire d'un rapport de stage de Sylvain Sené, lui-même réalisé à partir d'un article de Dominique Rossin. Le lecteur trouvera une présentation succinte du modèle du tas de sable aux adresses perso.ens-lyon.fr/sylvain.sene/files/Report AC.pdf et http ://www.liafa.jussieu.fr/ rossin/HTMLSandpile/Groupe.html .

1 Les configurations

Dans tout l'article, on se donne un graphe fini non orienté $G = (E, A)$: E est un ensemble fini non vide (l'ensemble des sommets) et A (l'ensemble des arêtes) est une partie de l'ensemble des parties de E à deux éléments. On dit que deux points $x, y \in E$ sont voisins si la paire $\{x, y\}$ appartient à A. Pour tout $x \in E$, on note $d(x)$ le nombre de voisins de x.

On suppose que le graphe est connexe, autrement dit que pour tout $x, y \in E$, on peut trouver un nombre fini de points $x_0, \ldots, x_n$ tel que $x_0 = x$, $x_n = y$ et tel que pour tout $k \in [1 \ldots n]$, x_k soit un voisin de x_{k-1}. Un tel $(n+1)$-uplet $(x_0, \ldots, x_n)$ s'appelle chemin de x à y, de longueur n. On appelle distance de x à y, notée $d(x, y)$, la longueur du plus court chemin de x à y. En particulier, $d(x, y) = 1$ si et seulement si x et y sont voisins.

On suppose que E contient deux types de sommets : les sommets ordinaires et les puits. On note F l'ensemble des sommets ordinaires et $F^c = E \setminus F$ l'ensemble des puits. On appelle configuration une application de F dans $\mathbf{Z}$ et configuration positive une application de F dans $\mathbf{N}$. Une configuration positive $u : F \to \mathbf{N}$ s'interprête comme une répartition de grains de sable où le nombre de grains à un sommet $x \in F$ est $u(x)$.

On note C l'ensemble de toutes les configurations, C_+ l'ensemble de toutes les configurations positives. Si u et v sont deux configurations quelconques, on note $u + v$ la configuration définie par $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ pour tout $x \in F$.

Pour tout $x \in F$, on note ϵ_x et Δ_x les configurations définies par

$$\epsilon_x(y) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{array} \right.$$

$$\Delta_x(y) = \left| \begin{array}{cc} -d(x) & \text{si } y = x \\ 1 & \text{si } d(x,y) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

2 D'une configuration instable à une configuration stable

Une configuration positive u est dite stable si $u(x) < d(x)$ pour tout $x \in F$, et instable dans le cas contraire. L'ensemble S des configurations stables est fini.

Si une configuration positive u est instable, alors il se produit un éboulement en chaque sommet sommet instable : chaque sommet x tel que $u(x) \geq d(x)$ perd $d(x)$ grains et en distribue 1 à chacun de ses voisins. Les grains tombant dans un puits sont définitivement perdus. L'éboulement d'une configuration u en un sommet instable x transforme la configuration u en la configuration positive $T_x(u) = u + \Delta_x$.

On remarque que si une configuration positive possède deux sommets instables x et y, l'éboulement des sommets x et y peut être effectué dans n'importe quel ordre et conduit à la configuration positive $T_x(T_y(u)) = T_y(T_x(u)) = u + \Delta_x + \Delta_y$. Cette remarque se généralise à un nombre arbitraire de sommets instables.

Des sommets stables peuvent devenir instables suite à un éboulement et s'ébouler à leur tour. Il se produit alors une avalanche. Toutefois, si l'avalanche dure, certains grains finissent par tomber dans un puits, et les éboulements successifs finissent par ramener une configuration instable à une configuration stable. Comme un sommet instable devra être éboulé à un moment ou un autre et comme les éboulements commutent, cette configuration ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les éboulements.

Si u est une configuration positive, on note $s(u)$ la configuration stable obtenue à partir de u en éboulant les sommets instables. En particulier, $s(u) = u$ si u est déjà une configuration stable.

Suggestions de développement :

1. Justifier le fait que le nombre d'éboulements est fini. Indication : soit r la distance maximale entre un sommet et l'ensemble des puits. A une configuration u, on associe le r-uplet $(n_1, \ldots, n_r)$ où n_k est le nombre de grains de sable situés à une distance $\geq k$ du puits le plus proche. Montrer qu'un éboulement transforme ce r-uplet en un r-uplet plus petit pour l'ordre lexicographique.
2. Majorer la taille de l'avalanche (c'est-à-dire le nombre d'éboulements) en fonction de r et du nombre de grains sur le graphe. Indication : combien y-a-t-il de r-uplets $(n_1, \ldots, n_r)$ possibles pour une configuration ayant au plus N grains ?
3. Justifier l'affirmation « Comme un sommet instable devra être éboulé à un moment ou un autre et comme les éboulements commutent, cette configuration ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les éboulements ».
4. On prend $E = [0 \ldots N+1]$, $F = [1 \ldots N]$ et $A = \{\{k, k+1\}; k \in [0 \ldots N]\}$. Réaliser un programme montrant la succession d'éboulements transformant une configuration positive en une configuration stable. Quelle configuration stable obtient-on à partir des configurations $(2, 1, \ldots, 1)$, $(1, 2, 1 \ldots, 1)$ et $(2, \ldots, 2)$?

3 Etude d'une chaîne de Markov sur S

Construisons une suite de configurations stables de la façon suivante. On part de la configuration vide. A chaque étape, on ajoute un grain sur un sommet X_n choisi au hasard dans F et on éboule les sommets instables jusqu'à obtenir une configuration stable. Soit W_n la configuration stable obtenue après l'ajout des n premiers grains.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'ensemble fini S. Soit δ la configuration stable maximale, définie par $\delta(x) = d(x) - 1$ pour tout $x \in F$. Comme δ est accessible depuis tout état, on en déduit que δ est récurrente. De plus, la chaîne possède une seule classe récurrente R et R est l'ensemble des états accessibles depuis δ.

Suggestions de développement :

1. Ecrire une relation de récurrence vérifiée par la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Pourquoi la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle une chaîne de Markov ?
2. Justifier les affirmations concernant δ et R.
3. Que peut-on dire du comportement asymptotique de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
4. Simuler la chaîne pour $F = [1 \ldots N]$.

4 Le groupe du tas de sable

Si u et v sont deux configurations positives, on pose $u \oplus v = s(u+v) \in S$. On définit ainsi une loi interne sur C_+ ou même sur S. Cette loi est clairement commutative.

On peut remarquer que si x est un sommet instable de u, alors x est aussi un sommet instable de $u+v$ et $T_x(u) \oplus v = s(T_x(u)+v) = s(T_x(u+v)) = s(u+v) = u \oplus v$. Une récurrence immédiate montre que $s(u) \oplus v = u \oplus v$. On en déduit facilement que la loi $\oplus$ est associative.

On vérifie que R est stable pour la loi $\oplus$ en remarquant que $R = \{\delta \oplus v ; v \in C_+\}$, ce qui découle vient du fait que les états récurrents sont les états accessibles depuis δ.

Soit $c = \delta - (\delta \oplus \delta)$. Comme $c \in C_+$, la configuration $e = \delta \oplus c$ est récurrente. De plus, $e \oplus \delta = (\delta \oplus \delta) \oplus c = \delta$. On en déduit facilement que e est élément neutre pour la loi $\oplus$ restreinte à R.

De même, on vérifie facilement que δ admet pour opposé $e \oplus c \in R$ et plus généralement que tout élément $u \in R$, admet pour opposé l'élément $e \oplus c \oplus (\delta - u) \in R$.

On en déduit que $(R, \oplus)$ est un groupe abélien, appelé groupe du tas de sable. On peut montrer que le groupe $(R, \oplus)$ est isomorphe au groupe quotient $(\mathbf{Z}^F/D, +)$, où D est le sous-groupe de $\mathbf{Z}^F$ engendré par l'ensemble des Δ_x pour $x \in F$. Pour cela, il suffit de vérifier que chaque classe d'équivalence modulo D contient une configuration récurrente et une seule.

Par ailleurs, on peut montrer que la famille $\{\Delta_x \; ; \; x \in F\}$ est libre dans $\mathbf{R}^F$, ce qui entraîne que le groupe $(\mathbf{Z}^F/D, +)$ est fini, d'ordre égal à la valeur absolue du déterminant des vecteurs $(\Delta_x)_{x\in F}$.

Suggestions de développement :

1. Compléter la démonstration que $(R, \oplus)$ est un groupe.
2. Montrer que toute configuration est équivalente modulo D à une configuration récurrente. On pourra commencer par montrer le résultat pour une configuration

positive. Remarque : l'unicité de la configuration récurrente équivalente est plus difficile à montrer.

3. Montrer que la famille $\{\Delta_x \ ; \ x \in F\}$ est libre. Indication : partir d'une combinaison linéaire $\sum_{x \in F} \lambda_x \Delta_x$ nulle, et regarder ce qui se passe en un sommet x tel que $|\lambda_x|$ est maximum.
4. Calculer l'élément neutre lorsque $F = [1 \ldots N]$.

5 Un autre modèle.

Dans le modèle précédent, on peut objecter que la définition de stabilité n'est pas réaliste. Dans un tas de sable réel, c'est la pente qui est limitée plus que la hauteur.

On peut donc remplacer la condition de stabilité par une condition sur la pente, par exemple $|u(y) - u(x)| \leq d(x, y)$ quels que soient x et y dans E, avec la convention $u(x) = 0$ lorsque x est un puits. Un sommet instable est alors un sommet où le nombre de grains excède de deux au moins le nombre de grains d'un de ses voisins.

Il reste alors à fixer une règle pour les éboulements. On peut décider par exemple qu'un sommet instable donne un grain à un de ses voisins, choisi au hasard parmi ceux qui ont le moins de grains. Le grain qui descend suit donc la ligne de plus grande pente. Mais s'il y a plusieurs sommets instables, les grains qui descendent peuvent interférer et l'ordre dans lequel on éboule les sommets intervient.

Pour éviter ce problème, on peut supposer qu'on ajoute les grains un à un, et que l'éboulement d'un sommet instable ne lui fait perdre qu'un grain. Autrement dit, le grain de trop n'entraîne pas d'autre grain dans sa chute. Dans ce cas, il n'y a qu'un sommet instable à la fois au cours d'une avalanche et ce sommet redevient stable après avoir perdu un grain.

Notons W_n la configuration stable obtenue après l'ajout des n premiers grains. On vérifie que $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov. On peut montrer que presque sûrement la suite de configurations est stationnaire et aboutit à la configuration $l : x \to d(x, F^c)$.

Suggestions de développement :

1. Vérifier que si u est une configuration stable pour ce modèle, alors $u + \epsilon_x$ possède au plus un sommet instable. Dans ce cas, quel est l'effet de l'éboulement ? Quel est l'effet de l'avalanche ?
2. Pourquoi a-t-on $W_n = l$ à partir d'un certain rang ? Indication : que peut-on dire de l'ensemble des configurations stables telles que $u(x) \geq 1$ pour tout $x \in F$?