Contrôle continu 2

Documents et calculatrices interdits. L'exercice et le problème sont indépendants.

Barème indicatif. Exercice : 3 points. Questions de cours : 3 points. Problème : 14 points.

Exercice

Soient G un groupe fini d'ordre n pair et $S = \{x \in G : x^2 = 1_G\}$.

1. Montrer que la formule $\varepsilon \cdot g = g^\varepsilon$ définit une action du groupe $\{-1, 1\}$ sur G.
2. À l'aide de l'équation aux classes, montrer que $|S|$ est pair.
3. En déduire que G possède au moins un élément d'ordre 2.

Questions de cours

Soient G un groupe et X un ensemble. On suppose que le groupe G agit sur X.

1. Montrer que l'action de G sur X fournit un morphisme de groupes de G dans $\mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble X.
2. Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe une bijection entre l'orbite de x et le quotient $G/\mathrm{Stab}(x)$. En déduire que si G est fini alors $|G| = |\mathrm{Stab}(x)||\mathrm{Orb}(x)|$.
3. Dans $\mathfrak{S}(X)$, on considère une permutation σ et un ℓ-cycle $\gamma = (a_1 \ \dots \ a_\ell)$. Expliciter sans démonstration la permutation $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.

Problème

Soit G un groupe. Pour tout sous-groupe H de G, on appelle normalisateur de H l'ensemble $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$.

1. Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G contenant H, que H est distingué dans $N(H)$ et que $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G ayant ces propriétés.
2. Dans cette question, on suppose que G est fini. Montrer que le nombre de conjugués de H dans G est $[G : N(H)]$.
   Indication : utiliser l'action de G par conjugaison sur l'ensemble des sous-groupes de G. On rappelle qu'un conjugué de H dans G est un sous-groupe de G de la forme gHg^{-1} avec $g \in G$.

3. En déduire que si G est fini et si H est strictement inclus dans G, alors l'union des conjugués de H dans G est strictement incluse dans G.
4. Dans cette question on considère $G = GL_n(\mathbb{C})$ et on prend H le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures inversibles. Pourquoi la réunion des conjugués de H est-elle égale à G tout entier ?
5. Dans cette question, on suppose que G agit sur un ensemble X. On fixe $x \in X$.
   (a) Soit $g \in G$. Montrer que $\mathrm{Stab}(g \cdot x)$ et $\mathrm{Stab}(x)$ sont conjugués, et qu'ils sont égaux si et seulement si $g \in N(\mathrm{Stab}(x))$.
   (b) En déduire l'équivalence
   $$\mathrm{Stab}(x) = N(\mathrm{Stab}(x)) \iff \forall y \in \mathrm{Orb}(x) \setminus \{x\},\ \mathrm{Stab}(y) \neq \mathrm{Stab}(x).$$
6. Dans cette question on prend $G = \mathfrak{S}_4$ et H égal au sous-groupe de G engendré par le 3-cycle $\gamma = (1\ 2\ 3)$. On note τ la transposition $(1\ 2)$. On considère l'action du groupe G sur l'ensemble G/H par translation à gauche.
   (a) Donner la liste des éléments de la classe τH.
   (b) Quel est le stabilisateur de H ?
   (c) En déduire le stabilisateur de τH.
   (d) Déterminer $N(H)$.
   (e) En déduire le nombre de conjugués de H dans G et en donner la liste.
7. Dans cette question, on considère l'ensemble $S = \{-1, 1\}^3$ (donc S est l'ensemble des sommets d'un cube de $\mathbb{R}^3$ centré en 0). On note G le sous-groupe de $O^+(\mathbb{R}^3)$ constitué des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble S globalement invariant. On rappelle que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
   (a) Soit $E = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ l'ensemble des trois axes de coordonnées. Ces axes joignent les centres des faces opposées du cube. On considère l'action naturelle du groupe G sur l'ensemble E. Pour $1 \leq i \leq 3$ on note S_i le stabilisateur de Δ_i. Montrer que les sous-groupes S_1, S_2, S_3 sont tous conjugués dans G.
   (b) Donner un élément de G qui n'appartient pas à $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.
   (c) Montrer que $N(S_1) = S_1$.
   (d) Déterminer l'ordre de S_1.
   (e) En utilisant le morphisme de groupes de G dans $\mathfrak{S}(E)$ fourni par l'action de G sur l'ensemble E, montrer que le sous-groupe $K = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ est distingué dans G.
   (f) Montrer que $|K| \geq 4$.
   (g) Déterminer K.