GRENOBLE 1

CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Christine LESCOP
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
UMR 5582
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères Cedex
France

S^t Martin d'Hères, le 6 avril 2001

Madame, Monsieur

Je pense que Sylvain POIRIER a d'exceptionnelles aptitudes à la recherche en Mathématiques. Je le connais depuis le début de sa thèse qu'il a effectuée sous ma direction de septembre 1997 à janvier 2000, et qui a été qualifiée d'excellente par les rapporteurs Pierre Vogel et Dror Bar-Natan et par le jury de soutenance auquel ont notamment participé Oleg Viro et Maxim Kontsevich. Il a dévié du sujet que je lui avais proposé pour étudier l'invariant de Vassiliev universel des nœuds obtenu comme développent perturbatif de la théorie de Chern-Simons. Cet invariant est défini ci-dessous à l'aide d'une série d'intégrales sur des espaces de configurations de points dans l'espace ambiant assujettis à des contraintes liées aux nœuds. Lorsque Kontsevich a introduit l'intégrale qui porte son nom qui est l'invariant de Vassiliev universel des nœuds le plus connu et utilisé. Il a posé la question naturelle et centrale: "Est-ce-que les deux invariants coïncident?" Cette question est toujours ouverte. Mais Sylvain POIRIER l'a fait progresser de manière spectaculaire. Il l'a en particulier réduite au calcul d'une constante de l'espace des diagrammes de Feynman appelée *anomalie.*. De plus, il a su convaincre l'auteur d'une prépublication de 80 pages - dont la difficulté rebutait tous les spécialistes du sujet et qui prétendait calculer cette anomalie - que sa démonstration était vouée à l'échec. Une autre question centrale dans la théorie de Vassiliev des nœuds est le calcul de l'image de l'intégrale de Kontsevich des nœuds dans l'espace des diagrammes de Feynman et plus modestement l'estimation de réseaux qui la contiennent ou de dënominateurs. La connaissance des dénominateurs est cruciale pour l'étude des invariants quantiques. Là encore la thèse de Sylvain POIRIER a permis des progrès notables.

L'*expression perturbative* $Z(K)$ *de la théorie de Chern-Simons*, à valeurs dans l'algèbre de diagrammes de Feynman -modulo les relations classiques de la théorie de Vassiliev (STU, AS)- $\mathcal{A}(S^1)$, est donnée par la somme suivante qui porte sur tous les graphes non vides uni-trivalents Γ, munis d'un ordre cyclique sur l'ensemble des sommets univalents, et dont chaque composante connexe contient au moins un sommet univalent:

$$Z(K) = 1 + \sum_{\Gamma} \frac{I_K(\Gamma)}{|\Gamma|}[\Gamma]$$

où $|\Gamma|$ désigne le nombre d'automorphismes de Γ, $[\Gamma]$ désigne la classe de Γ (muni d'une orientation arbitraire de ses sommets trivalents) dans $\mathcal{A}(S^1)$, et $I_K(\Gamma)$ est définie (au signe près) de la manière suivante : Notons $C_K(\Gamma)$ l'espace des injections des sommets du graphe Γ dans $\mathbf{R}^3$ dont la restriction aux sommets univalents se factorise par le plongement K en respectant l'ordre cyclique donné. À une orientation des arêtes de Γ correspond l'application Ψ de $C_K(\Gamma)$ dans le produit sur toutes les arêtes de Γ de facteurs S^2 indexés par ces arêtes, dont la projection sur un facteur S^2 est la direction du segment joignant les extrémités de l'arête correspondante. $I_K(\Gamma)$ est l'intégrale sur $C_K(\Gamma)$ de la forme standard de volume total 1 sur le produit des sphères transportée par Ψ.

Bott et Taubes avaient montré la convergence des intégrales $I_K(\Gamma)$ en compactifiant les espaces de configurations $C_K(\Gamma)$ de sorte que Ψ s'étende au compactifié, et étudié les variations des $I_K(\Gamma)$ lors d'isotopies de K. Altschuler et Freidel ont ensuite étudié les propriétés de la série Z, regroupant les variations de Bott et Taubes en une série $\alpha \in \mathcal{A}(S^1)$ appelée anomalie (indépendante du nœud), ce qui leur a permis de montrer

$$Z(K) = Z_0(K) \exp(\frac{I_K(\theta)}{2}\alpha)$$

où θ désigne le graphe à une seule arête et deux sommets univalents et $Z_0(K)$ est un invariant isotopique de K. Les physiciens conjecturent $\alpha = [\theta]$.

Dans sa première prépublication de décembre 1998 [math/9901028], Sylvain POIRIER a commencé son étude de Z par une exposition autonome (ne s'appuyant que sur des résultats algébriques sur $\mathcal{A}(S^1)$, classiques dans la théorie de Vassiliev) de cette série qu'il a exprimée comme une série de degrés d'applications d'ensembles de départ des recollements de compactifications d'espaces de configurations. Pour ce faire, il a introduit un procédé original de numérotations des arêtes des graphes et défini et étudié une compactification des espaces de configurations $C_K(\Gamma)$ différente de celle de Bott et Taubes. Ses méthodes lui ont permis de simplifier les démonstrations de propriétés fondamentales de Z et d'y ajouter des estimations des dénominateurs des coefficients de cette série.

Dans sa deuxième prépublication de février 1999 [math/9902058], Sylvain POIRIER a continué à exploiter sa profonde compréhension de la topologie des espaces de configurations pour montrer qu'une limite Z^ℓ de Z qu'il a très intelligemment définie fournissait un foncteur monoïdal de la catégorie des q-enchevêtrements dans celle des diagrammes de Feynman qui possédait toutes les bonnes propriétés du foncteur défini par l'intégrale de Kontsevich. Dans sa thèse, il a aussi montré que l'anomalie s'annulait en degré 3. Puis, dans un travail ultérieur et avec des idées différentes il a aussi programmé le calcul (que je n'ai pas vérifié) de l'anomalie en degré 5 et obtenu qu'elle s'annulait. En corollaire, il généralise jusqu'en degré 6 le théorème 2.1 de l'article de Kontsevich dans les actes du premier congrès européen qui exprime l'intégrale de Kontsevich en fonction des intégrales d'espaces de configurations ci-dessus en degré 2. Sans même mentionner les motivations physiques et géométriques de ce travail, il est extrêmement intéressant de savoir relier l'intégrale de Kontsevich à la série perturbative $Z_0(K)$ qui admet la jolie définition énoncée ci-dessus. En effet, l'intégrale de Kontsevich est l'invariant universel pour tous les invariants quantiques et de type fini d'entrelacs définis dans ces quinze dernières années. Sa définition présente trois inconvénients que n'ont pas $Z_0(K)$: la complexité de son énoncé, la nécessité d'un choix de décomposition de l'espace ambiant comme produit du plan complexe par la droite réelle, et enfin la nécessité d'introduire des régularisations lorsque l'on veut la faire converger quand les configurations de points de $\mathbf{C}$ prennent des positions limites (par exemple, dans sa définition combinatoire sur la catégorie des enchevêtrements). De plus, les résultats de rationalité de la première prépublication de Sylvain POIRIER permettent d'améliorer les estimations connues pour les dénominateurs de l'intégrale de Kontsevich.

Sylvain POIRIER a effectué les travaux ci-dessus en chercheur autonome. Il a lui-même choisi une voie dans laquelle je n'étais pas spécialiste (au lieu du sujet que je lui avais proposé) et s'est repéré très rapidement tout seul dans l'abondante littérature sur les invariants de Vassiliev avec une maturité impressionnante. La seule aide que je lui ai apportée est de relire ses versions préliminaires et d'écouter ses arguments avec attention. J'ai toujours été impressionnée par l'originalité, la solidité et la profondeur de sa compréhension mathématique.

En conclusion, je pense que Sylvain POIRIER a déjà montré qu'il était un chercheur exceptionnel en obtenant seul et rapidement des résultats de premier plan dans un sujet où la concurrence est rude. et je soutiens vivement sa candidature à tout programme de recherches pour lequel il est motivé.

Christine LESCOP

P.-S. : N'hésitez pas à me contacter pour obtenir des informations complémentaires sur le dossier de Sylvain POIRIER.

I have known Sylvain Poirier for 4 years. I was his thesis advisor. I think that he is an exceptionally gifted young researcher who has already obtained important results. Please do not hesitate and contact me for any question about Sylvain Poirier and his work.