Introduction aux invariants de type fini des variétés de dimension 3. Notes de cours de DEA 2001-2002

Christine Lescop *

January 23, 2002

Abstract

Ce cours sera une introduction aux invariants de type fini des variétés de dimension 3 qu'on supposera compactes connexes et orientables en l'absence de précision contraire. On commencera par y présenter quelques manières de visualiser ces variétés de dimension 3 et on étudiera le comportement d'invariants classiques dérivés du groupe fondamental sur ces variétés. On s'attachera ensuite plus particulièrement aux variétés qui ont la même homologie que la sphère unité S^3 de $\mathbf{R}^4$, appelées sphères d'homologie. On introduira l'invariant de Casson des sphères d'homologie en suivant l'approche de G. Kuperberg et D. Thurston [KuTh] en étudiant la topologie de l'espace des couples de points distincts de ces variétés. On reconnaîtra alors que l'invariant construit est celui que Casson avait introduit en 1984 - en utilisant la topologie des espaces de représentations des groupes fondamentaux des variétés dans $SU(2)$-, grâce à une propriété de "finitude d'ordre 3" qui le caractérise. La fin du cours sera consacrée à la construction et à la caractérisation de tous les invariants de sphères d'homologie satisfaisant des propriétés de "finitude d'ordre n". Ce cours sera notamment basé sur les articles [KuTh, GGP].

Ces notes de cours sont conçues pour être lisibles de manière autonome par des étudiants de DEA. Elles contiennent des références précises à des cours de base et à des cours plus avancés où le lecteur pourra compléter ses connaissances à sa guise, ainsi que des références à des articles de recherche utilisés pour la préparation du cours.

Merci d'avance de me signaler les fautes même minimes que vous trouver(i)ez dans ces notes.

Mots-clefs: topologie en dimension 3, variétés de dimension 3, scindements de Heegaard, chirurgie, invariant de Casson, espaces de configurations, invariants de type fini.
Keywords: 3-dimensional topology, 3-manifolds, Heegaard splittings, surgery, Casson invariant, configuration spaces, finite type invariants.
A.M.S. subject classification: 57N10, 57M25

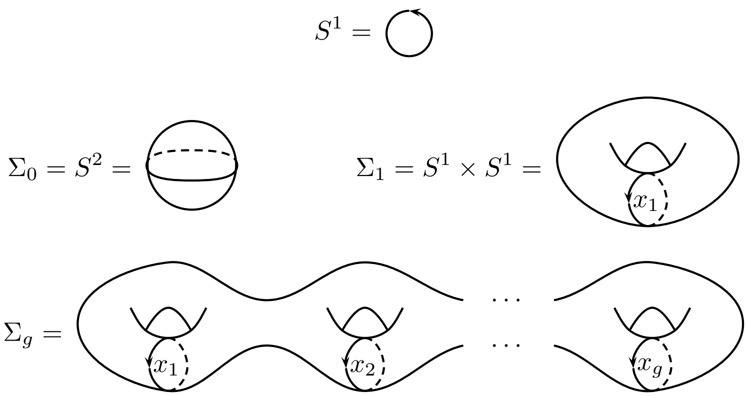
*CNRS, Institut Fourier (UMR 5582)

1 Quelques présentations des variétés de dimension 3

1.1 Introduction aux variétés de dimension 3

Dans ce paragraphe d'introduction, pour un entier naturel k, nous appelons *k-variété* une variété topologique (à homéomorphisme près), compacte, orientable, connexe, sans bord de dimension k.

Avec cette définition que nous expliciterons ultérieurement, nous pouvons donner les listes complètes et sans répétition des 1-variétés et des 2-variétés que nous appelons ici simplement surfaces. La seule 1-variété est le cercle S^1, et, pour chaque entier naturel g, il y a exactement une surface (voir [Mas, Chapitre 1] ou [Hi, Chapitre 9] dans le contexte différentiable): la surface Σ_g de genre g dessinée sur la figure suivante.



Pour les 3-variétés, le problème de la classification n'est pas résolu, c'est-à-dire que nous ne connaissons pas de telle liste, et le principal but de la topologie de dimension 3 est d'en fournir une.

Nous disposons pour cela de plusieurs manières de représenter les 3-variétés, nous allons décrire deux d'entre elles, les *scindements de Heegaard* et les *chirurgies*. Nous allons aussi décrire des *invariants,* fonctions des 3-variétés dans des ensembles mieux connus (telles le genre pour les surfaces), qui nous permettront de distinguer des 3-variétés non homéomorphes.

Avant de donner des constructions générales, examinons quelques exemples naturels de 3-variétés.

Notre 3-variété préférée sera la sphère S^3 de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$ munie de sa topologie standard comme sous-espace de $\mathbf{R}^4$:

$$S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

On peut voir S^3 comme la réunion de deux boules B^3 de dimension 3, $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1\}$, $B^3_+ = \{x \in \mathbf{R}^4 \cap S^3 \,|\, x_4 \geq 0\}$ et $B^3_- = \{x \in \mathbf{R}^4 \cap S^3 \,|\, x_4 \leq 0\}$ dont les bords homéomorphes à S^2 sont *recollés*, c'est-à-dire identifiés l'un à l'autre par un homéomorphisme. Ceci s'écrit

$$S^3 = B^3_+ \cup_{S^2} B^3_-$$

où la *topologie d'un recollement* est la topologie naturelle où les ouverts sont les ensembles qui intersectent les deux parties recollées (ici, B^3_+ et B^3_-) selon deux ouverts.

S^3 est aussi le compactifié d'Alexandroff de l'espace ambiant $\mathbf{R}^3$,

$$S^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\text{point à l'infini}\}$$

comme nous le montre par exemple l'équation $B^3 \setminus \{\text{point } 0\} = S^2 \times]0,1] = S^2 \times [1, \infty[$. Ici comme dans tout le chapitre, nous regardons les variétés à homéomorphisme près et le signe = signifie homéomorphe.

Mentionnons aussi à titre de premiers exemples les 3-variétés produits $\Sigma_g \times S^1$, le groupe de Lie $SO(3)$ des isométries positives de $\mathbf{R}^3$ et le quotient $SO(3)/\mathcal{A}_5$ de $SO(3)$ par le sous-groupe des isométries positives qui préservent l'icosaèdre régulier.

1.2 Définition des 3-variétés

Une variété *topologique* M de dimension n est un espace topologique séparé recouvert par une réunion dénombrable, *localement finie*[1] d'ouverts U_i ($i \in I$), où chaque U_i est identifié par un homéomorphisme $\phi_i : U_i \to V_i$ à un ouvert V_i de $\mathbf{R}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_1 \leq 0\}$. Les variétés topologiques sont considérées à homéomorphisme près, c'est-à-dire que deux variétés homéomorphes sont identiques.

Les points du *bord d'une variété* M de dimension n sont les points envoyés par ces homéomorphismes ϕ_i sur des éléments de $\mathbf{R}^n$ tels que $x_1 = 0$.[2] Le bord d'une variété M est noté ∂M. Une variété est dite *sans bord* si son bord est vide. Le bord d'une variété M de dimension n est une variété sans bord de dimension $(n-1)$. *L'intérieur* $\mathrm{Int}(M)$ d'une variété à bord est le complémentaire de son bord dans M. $\mathrm{Int}(M) = M \setminus \partial M$.

Pour $r = 1, \ldots, \infty$, la variété topologique M a une structure de *variété différentiable de classe* C^r ou *variété* C^r, si, pour chaque paire $\{i,j\} \subset I$, l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ définie sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme de classe C^r. La notion d'application différentiable de classe C^s, $s \leq r$, entre deux telles variétés se définit naturellement grâce aux identifications locales de ces espaces avec des espaces euclidiens où elle est bien connue, et les variétés C^r sont considérées à difféomorphisme C^r près. Si les applications $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ préservent l'orientation pour $\{i,j\} \subset I$ (c'est-à-dire si le déterminant de leur matrice jacobienne est toujours positif) la variété M est dite *orientée*.

La variété ∂M est orientée lorsque M est orientée, par la convention de la *normale extérieure premier vecteur*[3] qui peut s'exprimer ainsi : si les identifications aux ouverts de $\mathbf{R}^n_-$ ci-dessus sont cohérentes avec l'orientation de M, les identifications locales de ∂M à des ouverts de $\mathbf{R}^{n-1}$ qui en sont issues par oubli de la première coordonnée définissent l'orientation de ∂M.

Exemples 1.1 Les premiers exemples de variétés sont bien sûr les ouverts de $\mathbf{R}^n_-$. Le premier exemple non trivial (à détailler en exercice) est celui de la sphère S^n unité de $\mathbf{R}^{n+1}$,

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

que l'on peut recouvrir par deux ouverts

$$U_N = S^n \setminus \{\text{Pôle sud} = (0, 0, \ldots, 0, -1)\}$$

$$U_S = S^n \setminus \{\text{Pôle nord} = (0, 0, \ldots, 0, +1)\}$$

que l'on peut envoyer sur $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ par les homéomorphismes respectifs $\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbf{R}^N$ qui envoie un point x sur l'intersection de la droite joignant x au pôle sud avec l'hyperplan $\mathbf{R}^n \times \{0\}$, et $\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbf{R}^N$ qui envoie un point x sur l'intersection de la droite joignant x au pôle nord avec l'hyperplan $\mathbf{R}^n \times \{0\}$.

La boule unité de $\mathbf{R}^j$ qu'on notera D^j ou B^j

$$B^j = D^j = \{x \in \mathbf{R}^j \mid \sum_{i=1}^{j} x_i^2 \leq 1\}$$

est une variété à bord de dimension j orientée par l'orientation de $\mathbf{R}^j$. La sphère de dimension n sera toujours orientée comme le bord de la boule de dimension $(n+1)$.

On peut aussi définir les variétés PL ou linéaires par morceaux comme suit. Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points affinement indépendants dans $\mathbf{R}^n$, par exemple, un simplexe de

[1] Tout point a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de U_i.

[2] Il n'y a pas d'homéomorphisme préservant l'origine de $\mathbf{R}^n$ qui transforme un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n_-$ en un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$. (C'est un exercice de topologie générale lorsque $n = 1$, et un exercice d'application des théories d'homologie ou des groupes d'homotopie résumées dans des chapitres ultérieurs pour n plus grand.)

[3] Une base de l'espace tangent de M en un point du bord de M formée d'un vecteur normal extérieur suivi d'une base orientée de l'espace tangent au bord de M est orientée.

dimension 3 est un tétraèdre. Appelons *triangulation* d'un espace topologique X un recouvrement localement fini[4] de X par des k-simplexes (injectés dans X) tel que (1) toute face d'un de ses simplexes est encore un de ses simplexes (2) deux quelconques de ses simplexes qui se rencontrent se rencontrent exactement le long d'un de ses simplexes (3) un sous-ensemble de X est fermé si et seulement si son intersection avec chacun des simplexes de la triangulation est fermée. Une *subdivision* T' d'une triangulation T de X est une triangulation de X telle que chaque simplexe de T' est inclus dans un simplexe de T. Deux triangulations de X sont *équivalentes* si elles ont des subdivisions isomorphes. Une *variété PL* est une variété topologique munie d'une classe d'équivalence de triangulations. Le théorème suivant assure qu'en dimension 3, toutes ces notions coïncident.

Théorème 1.2 *Les catégories des variétés topologiques, C^i et PL sont identiques en dimension inférieure ou égale à trois.*

Cet énoncé entraîne par exemple que toute variété topologique de dimension 3 a une unique structure C^∞. Il contient plusieurs théorèmes dus à différents auteurs (voir [Ku]). L'équivalence entre les catégories $C^i, i = 1, 2, \dots, \infty$ découle du travail [Whi] de Whitney en 1936. En 1934, Cairns [Ca1] a fourni la flèche de la catégorie C^1 vers la catégorie PL, l'existence d'une triangulation sur les variétés C^1, il a montré [Ca2, Theorem III] qu'elle était surjective en 1940. Moïse [Mo] a montré en 1952 l'équivalence entre la catégorie topologique et la catégorie PL en dimension 3. Le diagramme a été complété indépendamment par Munkres [Mu, Theorem 6.3] et Whitehead [Wh] qui ont prouvé en 1960 l'injectivité de la flèche naturelle de la catégorie C^1 vers la catégorie topologique en dimension 3.

Remarque 1.3 Le théorème d'équivalence des structures ci-dessus est faux dès la dimension 4 où de nombreuses variétés topologiques n'admettent pas de structure différentiable tandis que $\mathbf{R}^4$ en admet une infinité et que la *conjecture de Poincaré lisse en dimension 4* qui conjecture que la sphère S^4 a une unique structure différentiable n'est toujours pas décidée.

Le théorème ci-dessus nous permettra de ne décrire que la topologie de nos 3-variétés, de coller sans lisser, et d'utiliser les outils de topologie différentielle décrits ci-dessous (et soigneusement justifiés dans le livre de Hirsch [Hi]) pour les étudier.

On appelle *n-variété* une variété de dimension n.

Un *plongement* C^∞ d'une k-variété C^∞ X avec ou sans bord dans une n-variété M C^∞ est une application différentiable ϕ telle que pour tout x de X, il existe un voisinage U_i de $\phi(x)$ dans M et un difféomorphisme ψ de U_i dans un ouvert V_i de $\mathbf{R}^n_-$ ou de $\mathbf{R}^n$, tel que $\psi \circ \phi$ soit un difféomorphisme de $\phi^{-1}(U_i)$ dans $V_i \cap \mathbf{R}^k_-$, où $\mathbf{R}^k_- = \mathbf{R}^k_- \times \{0, \dots, 0\} \subset \mathbf{R}^n$.

On définit une *sous-variété* comme l'image d'un tel plongement.

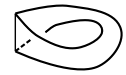
Un *fibré vectoriel euclidien de rang j* au dessus d'une k-variété X est une $(j+k)$-variété E appelée *espace total du fibré,* munie d'une application de projection différentiable p de E dans X et d'une classe d'équivalence d'atlas de fibré vectoriel euclidien de rang j. Un *atlas de fibré vectoriel euclidien de rang j* au dessus de $(p : E \longrightarrow X)$ est la donnée d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts et de difféomorphismes ϕ_i de $p^{-1}(U_i)$ dans $U_i \times \mathbf{R}^j$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times \mathbf{R}^j \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & \begin{array}{c}\text{projection}\\ \text{standard}\end{array} & \big\downarrow \\ U_i & \xrightarrow{\text{Identité}} & U_i \end{array}$$

et tels que, pour tout couple (i, h) d'éléments de I, la restriction du difféomorphisme $\phi_i \circ \phi_h^{-1}$ de $(U_h \cap U_i) \times \mathbf{R}^j$ envoie $(x \in U_h \cap U_i, v)$ sur $(x, A_x(v))$ où A_x est un isomorphisme de $\mathbf{R}^j$ qui préserve la norme : $A_x \in O(j)$. Deux atlas sont dits *équivalents* si leur superposition est encore un atlas.

[4]Tout point a un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes.

Remarquons que X se plonge dans (l'espace total d') un tel fibré par $x \in U_i \mapsto \phi_i^{-1}(x, 0)$, ce plongement est appelé *section nulle du fibré.* Remarquons aussi que la *fibre* $p^{-1}(x)$ est un espace vectoriel euclidien. Le *fibré en disques* associé à un tel fibré sera défini comme $\{y \in E), \| y \|_{p^{-1}(p(y))} \leq 1\}$.

Exercice 1.4 : 1. Montrer que l'espace total d'un fibré vectoriel euclidien de rang j au-dessus du cercle S^1 est homéomorphe au produit $S^1 \times \mathbf{R}^j$ si il est orientable.
2. Montrer que l'espace total d'un fibré vectoriel euclidien de rang 1 au-dessus du cercle S^1 est homéomorphe à la bande de Möbius  si il n'est pas orientable.

Théorème 1.5 *Tout plongement d'une k-sous-variété X compacte dans une n-variété M s'étend en un plongement d'un fibré euclidien de rang $(n-k)$ appelé* fibré normal de X dans M. *L'image du fibré en disques associé est appelée* voisinage tubulaire de X dans M.

RÉFÉRENCES POUR LA DÉMONSTRATION : Voir [Hi, Théorème 5.2, p.110]. ◇

On note I l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 1.6 Deux plongements f et g d'une k-sous-variété X sans bord dans l'intérieur d'une n-variété M sont dits *isotopes* si il existe une application C^∞ appelée *isotopie*

$$h : X \times I \longrightarrow M$$

telle que *l'isotopie au temps t*

$$h_t : x \mapsto h(x, t)$$

soit un plongement dans $\mathrm{Int}(M)$ pour tout t, et telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

Exercice 1.7 Soit A et B deux variétés compactes de dimension 3 dont les bords ∂A et ∂B sont difféomorphes et identifiés par un difféomorphisme $\phi : \partial A \longrightarrow \partial B$. On note $A \cup_\phi B$ la variété obtenue en recollant A et B à l'aide de ϕ, c'est-à-dire le quotient de la réunion disjointe $A \coprod B$ par les identifications $x \in \partial A \sim \phi(x) \in \partial B$. Montrer que si ϕ' est un difféomorphisme isotope à ϕ, $A \cup_\phi B$ est homéomorphe à $A \cup_{\phi'} B$.

Exercice 1.8 Montrer que la relation "être isotope à" est une relation d'équivalence.

Théorème 1.9 (Extension des isotopies) *Pour toute isotopie $h : X \times I \longrightarrow M$ d'une k-sous-variété X compacte sans bord dans l'intérieur d'une n-variété M, il existe une isotopie à l'identité*

$$H : M \times I \longrightarrow M$$

telle que $H_0 =$ Identité de M, et pour tout $t \in I$, $h_t = H_t \circ h_0$ et la restriction de H_t au bord de M est l'identité de ∂M.

RÉFÉRENCES POUR LA DÉMONSTRATION : Voir [Hi, Théorème 1.3, p.180]. ◇

Définition 1.10 Soit X et Z deux sous-variétés de dimensions respectives j et k d'une n-variété M. On suppose que $\partial X \cup \partial Z \subset \partial M$ ou que $X \cup Z \subset \mathrm{Int}(M)$ et $\partial Z = \emptyset$. Alors X et Z sont dites *transverses* si
(1) Pour tout point x de l'intersection $X \cap Z$, les espaces tangents en x de M, X et Z satisfont :

$$T_x M = T_x X + T_x Z$$

(2) Pour tout point de x de l'intersection $X \cap Z \cap \partial M$, les espaces tangents en x de ∂M, ∂X et ∂Z satisfont :

$$T_x \partial M = T_x \partial X + T_x \partial Z$$

(3) Pour tout point de x de l'intersection $\partial X \cap Z \cap \mathrm{Int}(M)$, les espaces tangents en x de ∂X, Z et M satisfont :

$$T_x M = T_x \partial X + T_x Z$$

Cette définition est équivalente à la définition alternative suivante : X et Z sont dites *transverses* si les conditions suivantes sont réalisées :

- L'intersection $X \cap Z$ est vide si $j + k < n$.
- L'intersection $\partial X \cap Z \cap M$ est vide si $j + k \leq n$.
- Tout point x de l'intersection $\mathrm{Int}(X) \cap Z \cap \mathrm{Int}(M)$ a un voisinage U_i dans M identifié à (et donc vu comme) un ouvert de $\mathbf{R}^n$, que X rencontre comme $\mathbf{R}^j \times (0, ..., 0)$ et que Z rencontre comme $(0, ..., 0) \times \mathbf{R}^k$.
- Tout point x de l'intersection $\partial X \cap Z \cap \mathrm{Int}(M)$ a un voisinage U_i dans M identifié à (et donc vu comme) un ouvert de $\mathbf{R}^n$, que X rencontre comme $\mathbf{R}^j_- \times (0, ..., 0)$ et que Z rencontre comme $(0, ..., 0) \times \mathbf{R}^k$.
- Tout point x de l'intersection $X \cap Z \cap \partial M$ a un voisinage U_i dans M identifié à (et donc vu comme) un ouvert de $\mathbf{R}^n_-$, que X rencontre comme $\mathbf{R}^j_- \times (0, ..., 0)$ et que Z rencontre comme $\mathbf{R}_- \times (0, ..., 0) \times \mathbf{R}^k$.

Si $j + k = n$, et si X et Z sont compactes, $X \cap Z$ est un ensemble discret et compact donc fini. Si de plus, X, Z et M sont orientées, au voisinage d'un point x d'intersection comme ci-dessus, on peut associer à chacune des trois identifications locales (de X, Z et M à des ouverts respectifs de $\mathbf{R}^j$, $\mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^n$) un signe $(+1)$ si l'identification respecte l'orientation et -1 sinon. Le produit de ces trois signes est appelé *signe du point d'intersection.* La somme des signes est appelée *nombre d'intersection algébrique de X et Z* et notée $< X, Z >$ ou $< X, Z >_M$.

Exercices 1.11 1. Montrer que sous les hypothèses ci-dessus, $< X, Z >= (-1)^{jk} < Z, X >$.
2. Montrer que si X est une j-sous-variété compacte orientée à bord d'une n-variété orientée M sans bord, et si Z est une k-sous variété compacte orientée sans bord de M telles que $j + k = n + 1$, alors

$$< \partial X, Z >_M = 0.$$

[On montrera que, dans ce cas, $X \cap Z$ est une variété compacte de dimension 1 (donc une réunion disjointe de cercles et d'intervalles) que l'on peut orienter de sorte les points de son bord

$$\partial(X \cap Z) = \partial X \cap Z$$

aient un signe déterminé par l'orientation de $X \cap Z$ (négatif si un vecteur tangent positif rentre dans l'intervalle et positif si il en sort, par exemple).]

Théorème 1.12 (Position générale) *Soit X et Y deux sous-variétés compactes d'une variété M. Il existe une isotopie de M qui envoie Y sur une variété Z transverse à X.*

Références pour la démonstration : [Hi, Chapitre 3, 2.]. ⋄

Théorème 1.13 *Soit M une variété de dimension n orientée. Deux plongements de B^n dans l'intérieur de M qui préservent l'orientation sont isotopes par une isotopie qui fixe le bord de M en tout temps.*

Références pour la démonstration : [Hi, p.185, Th.3.1]. ⋄

Théorème 1.14 *Tout difféomorphisme de D^2 qui vaut l'identité sur le bord est isotope à l'identité.*

Références pour la démonstration : [Hi, p.187, Ex.3]. ⋄

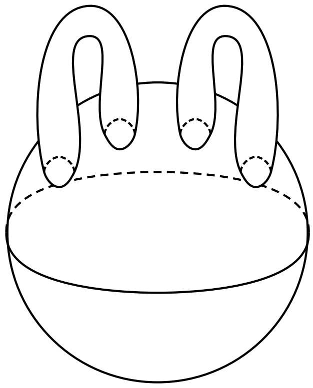
Théorème 1.15 *Tout difféomorphisme de S^2 qui préserve l'orientation est isotope à l'identité.*

Démonstration : C'est un corollaire immédiat des deux résultats précédents. ⋄

1.3 Scindements de Heegaard des 3-variétés

À partir de maintenant, les variétés considérées seront toutes **compactes, connexes, orientables, et sans bord** sauf mention explicite du contraire. L'expression *n-variété* regroupera ces hypothèses.

Un *corps à g anses* est la 3-variété compacte H_g de bord Σ_g que l'on voit plongée dans $\mathbf{R}^3$ sur le dessin de Σ_g du paragraphe 1.1. Il est obtenu à partir de la boule B^3 en lui ajoutant g anses comme le montre la figure suivante, ce qui explique la terminologie.



Le corps en anses de genre g

Théorème 1.16 *Toute 3-variété M s'écrit*

$$M = H_g^{(1)} \cup_{\Sigma_g^{(1)} \xrightarrow{h} \Sigma_g^{(2)}} H_g^{(2)}$$

où $H_g^{(1)}$ et $H_g^{(2)}$ sont deux copies de H_g et h désigne un difféomophisme qui identifie le bord $\partial H_g^{(1)} = \Sigma_g^{(1)}$ de $H_g^{(1)}$ au bord $\Sigma_g^{(2)}$ de $H_g^{(2)}$.

Démonstration : Une triangulation d'une 3-variété est nécessairement finie. Elle produit un scindement de Heegaard naturel où l'un des deux corps en anses est un voisinage régulier du 1-squelette (graphe formé des arêtes et des sommets) de la triangulation. Le deuxième corps en anses est le voisinage régulier du 1-squelette de la cellulation duale, graphe dont les sommets sont les barycentres des 3-simplexes de la triangulation et dont les arêtes, en bijection avec les 2-simplexes, relient deux centres de 3-simplexes se rencontrant le long d'un 2-simplexe. $\diamond$

Ces décompositions des 3-variétés, introduites par Heegaard à la fin du dix-neuvième siècle sont appelées *scindements de Heegaard*. Les remarques qui suivent nous aideront à les dessiner.

Remarquons d'abord que la connaissance complète du difféomorphisme h n'est pas nécessaire à la reconstruction de la variété M. Il suffit de connaître les courbes images des *méridiens* $\{x_i^{(2)}\}_{i=1,\dots,g}$ de $H_g^{(2)}$ par le difféomorphisme h^{-1}, $h^{-1}(x_i^{(2)}) = y_i$.

En effet, on reconstruit M comme suit:

$$M = \left(H_g^{(1)} \cup_{y_i \times I} (\cup_{i=1}^g D_{y_i} \times I)\right) \cup_{S^2} B^3$$

C'est-à-dire que l'on obtient M en collant d'abord à $H_g^{(1)}$ chaque cylindre $D_{y_i} \times I$ produit d'un disque D_{y_i} de bord y_i par l'intervalle I le long d'un voisinage tubulaire annulaire $y_i \times I$ de y_i sur $\Sigma_g^{(1)}$. Après ce premier collage des anses de $H_g^{(2)}$, il reste à reboucher la 3-variété obtenue qui a pour bord une sphère par la boule B^3.

Ce procédé définit M (toujours à homéomorphisme près) sans ambiguïté. Montrons le *lemme d'Alexander* qui assure que le rebouchage par une boule B^3 est bien défini. Il suffit de voir que si deux 3-variétés M_1 et M_2 sont homéomorphes en dehors de l'intérieur $\mathrm{Int}(B^3)$ d'une boule B^3, c'est-à-dire si il existe un homéomorphisme

ϕ de $M_1 \setminus \mathrm{Int}(B^3)_1$ dans $M_2 \setminus \mathrm{Int}(B^3)_2$, alors M_1 est homéomorphe à M_2. Or, ϕ induit un homéomorphisme ψ du bord S^2 de la première boule B^3_1 dans le bord S^2 de B^3_2, qui se prolonge naturellement à l'intérieur des boules par la formule $\psi(tx) = t\psi(x)$ pour $t \in [0,1], x \in S^2$, ce qui permet de prolonger ϕ en un homéomorphisme de M_1 dans M_2. On montre de même que le premier recollement d'un disque de bord y_i est bien défini. Le cylindre recollé n'est autre qu'un voisinage tubulaire du disque.

Nous allons maintenant caractériser les systèmes images du système des méridiens x_i par un difféomorphisme. Il est clair qu'un tel système doit satisfaire les conditions de la définition suivante.

Définition 1.17 Un Σ_g-système est une famille de g courbes simples fermées[5] dans Σ_g, deux à deux disjointes, qui ne sépare pas Σ_g.

Lemme 1.18 *Soit $\{x_i\}_{i=1,\dots,g}$ le Σ_g-système dessiné sur la figure de Σ_g du paragraphe 1.1. Pour tout Σ_g-système $\{y_i\}_{i=1,\dots,g}$, il existe un difféomorphisme h de Σ_g tel que $h(x_i) = y_i$.*

Démonstration : Le théorème 1.13 permet de montrer que deux sphères orientées privées chacune de $2g$ disques ouverts numérotés sont toujours identifiées par un difféomorphisme isotope à l'identité qui respecte les numérotations des composantes de bord. Il suffit alors de montrer qu'en enlevant à Σ_g un voisinage tubulaire des y_i (c'est-à-dire un anneau ouvert $S^1\times]-1,1[$ plongé autour de chaque y_i), on obtient une sphère S^2 privée de $2g$ disques. On sait que l'on obtient une surface connexe compacte orientable à $2g$ composantes de bord, donc une surface d'un genre k à déterminer privée de $2g$ disques. Il suffit alors de montrer que $k = 0$, ce qui se fait aisément en utilisant la caractéristique d'Euler par exemple. La *caractéristique d'Euler* d'un espace topologique muni d'une triangulation avec un nombre fini de simplexes est le nombre de simplexes de dimension paire diminué du nombre de simplexes de dimension impaire. Ce nombre est indépendant de la triangulation utilisée pour le calculer comme on le verra dans le début du prochain chapitre où l'on rappellera les bases de l'homologie. Il est facile de voir que si $A \cup B$ est un espace topologique muni d'une triangulation qui induit une triangulation de deux de ses parties A et B, on a :

$$\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B)$$

À partir des calculs faciles de $\chi(S^1) = \chi(S^1 \times [0,1]) = 0$, on déduit alors que la caractéristique d'Euler d'une surface ne change pas lorsqu'on lui enlève des anneaux. La caractéristique d'Euler d'une surface est diminuée de $2g$ lorsqu'on lui enlève $2g$ disques ouverts. On déduit du calcul facile de $\chi(S^2) = 2$:

$$2 - 2g = \chi(S^2 \setminus 2g \text{ disques}) = \chi(\Sigma_g \setminus 2g \text{ anneaux}) = \chi(\Sigma_g)$$

et

$$\chi(\Sigma_k \setminus 2g \text{ disques}) = 2 - 2k - 2g$$

$\diamond$

On démontrerait de même :

Lemme 1.19 *Pour toute courbe simple y plongée non-séparante de Σ_g, il existe un Σ_g-système $\{y_i\}_{i=1,\dots,g}$ tel que $y = y_1$.*

Démonstration : Exercice. $\diamond$

On définit le *genre d'un scindement de Heegaard* comme le genre de la surface commune aux deux corps en anses. Notons que la sphère S^3 est la seule 3-variété qui admet un scindement de Heegaard de genre 0.

S^3 admet aussi le scindement de Heegaard de genre 1 suivant :

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} = (D^2 \times S^1) \cup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D^2)$$

où

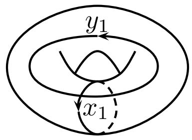
$$(D^2 \times S^1) = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

[5] Une courbe simple fermée est l'image d'un plongement de S^1.

$$(S^1 \times S^1) = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_2|^2 = \frac{1}{2}\}$$
$$(S^1 \times D^2) = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\}.$$

La première égalité provient par exemple du difféomorphisme de $\{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$ dans $(D^2 \times S^1)$ qui associe $(\sqrt{2}z_1, \frac{z_2}{|z_2|})$ à (z_1, z_2).

Ce scindement peut se dessiner de la manière suivante :

$\Sigma_1 = S^1 \times S^1 =$ 

Dans ce cas, la première étape du procédé général de reconstruction décrit plus haut qui consiste à recoller le produit par l'intervalle d'un disque de bord y_1 transforme le tore plein en une boule.

Nous allons maintenant décrire tous les scindements de Heegaard de genre 1. Nous savons qu'il suffit de connaître la classe d'isotopie de la courbe simple non séparante y_1.

On utilisera le lemme :

Lemme 1.20 *Tout difféomorphisme positif de $S^1 \times S^1$ est isotope à un difféomorphisme de la forme*

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$$

où a, b, c et d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$.

Esquisse de démonstration : En composant un difféomorphisme positif h quelconque donné par l'inverse d'un difféomorphisme normalisé qui induit le même isomorphisme que h sur

$$\pi_1(S^1 \times S^1) = H_1(S^1 \times S^1) = \mathbf{Z}[x_1] \oplus \mathbf{Z}[y_1]$$

on se ramène à montrer le lemme dans le cas où h est un difféomorphisme qui induit l'identité sur $\pi_1(S^1 \times S^1) = H_1(S^1 \times S^1)$ (voir chapitre suivant). Notons $< u, v >$ le nombre d'intersection algébrique de deux courbes u et v sur $S^1 \times S^1$ et notons x et y les courbes de la figure ci-dessus. Pour un difféomorphisme positif h de $S^1 \times S^1$ qui induit l'identité sur le H_1, on a $< h(x), x >=< x, x >= 0$ et $< h(x), y >=< x, y >= 1$. Ceci nous permet de ramener $h(x)$ sur une courbe parallèle à x par des isotopies sucessives qui réduisent le nombre de points d'intersection de x et $h(x)$ jusqu'à zéro, puis celui de $h(x)$ et de y jusqu'à un. On ramène ensuite $h(x)$ sur x, puis $h(y)$ sur y de la même manière et on conclut en utilisant le théorème 1.14. $\diamond$

Ce lemme entraîne, grâce au lemme 1.18 que toute courbe simple non séparante est isotope à une courbe de la forme $(z \in S^1 \mapsto (z^a, z^c))$ où a et c sont deux entiers premiers entre eux.

Le *méridien* d'un tore plein est une courbe non séparante du bord qui borde un disque dans le tore plein.

Pour un couple (p, q) d'entiers relatifs premiers entre eux avec $p \geq 0$, notons $L(p, q)$ la variété obtenue en recollant au tore plein de méridien $x = \text{Image}(z \mapsto (z, 1))$ le tore plein de méridien $y(p, q) = py - qx = \text{Image}(z \mapsto (z^{-q}, z^p))$. L'orientation de $L(p, q)$ est induite par celle du tore plein.

Exercices 1.21 1. Montrer que $L(p, q) = L(p, q - kp)$ pour tout entier relatif k.
2. Montrer que $S^3 = L(1, k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que $L(0, 1) = S^2 \times S^1$.
4. On suppose $p \neq 0$ et $p \neq 1$.
Montrer que le quotient de $S^3 = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ par les identifications

$$(z_1, z_2) \sim (\exp(2i\pi/p)z_1, \exp(2i\pi q/p)z_2)$$

est homéomorphe à $L(p, q)$. Ce quotient est appelé *espace lenticulaire de type* (p, q).
5. Montrer que si $\overline{q}$ est tel que $(q\overline{q} - 1)$ soit divisible par p, alors il existe un difféomorphisme préservant

l'orientation entre $L(p,q)$ et $L(p,\overline{q})$.
6. Montrer qu'il existe un difféomorphisme renversant l'orientation entre $L(p,q)$ et $L(p,-q)$.
7. Montrer que le groupe $SO(3)$ est homéomorphe à l'espace projectif réel de dimension 3

$$\mathbf{R}P^3 = L(2,1).$$

Solution partielle :
1. On pourra remarquer que le difféomorphisme du tore $(z_1,z_2) \mapsto (z_1 z_2^k, z_2)$ s'étend au tore plein $D^2 \times S^1$, et conclure en utilisant le fait que la variété scindée est déterminée par la donnée d'un des tores pleins muni de la courbe méridienne de l'autre tore plein.
4. et 5. Deux points (z_1,z_2) et (z_1',z_2') de S^3 sont identifiés si et seulement si il existe un entier k tel que $(z_1',z_2') = (\exp(2i\pi k/p)z_1, \exp(2i\pi kq/p)z_2)$. Ces identifications respectent le scindement de genre 1 de S^3 décrit plus haut. Voyons que le quotient par ces identifications du tore plein

$$\{(z_1,z_2); |z_1|^2+|z_2|^2 = 1, |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

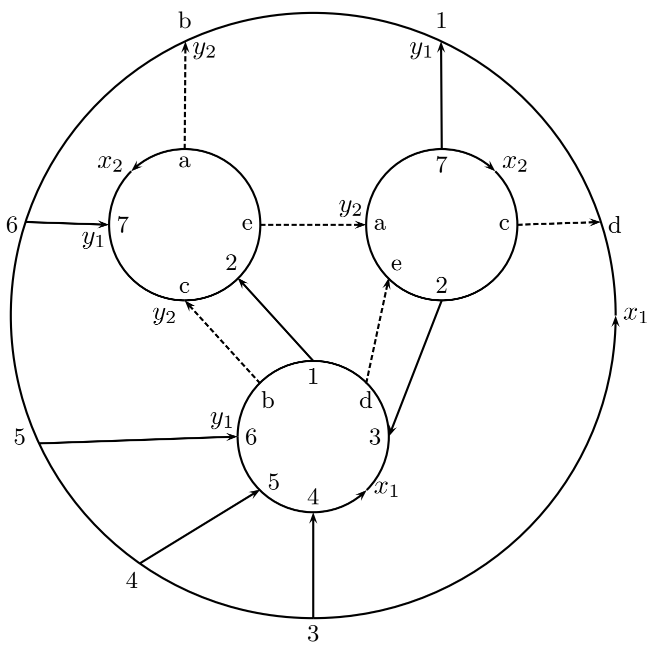
identifié à $D^2 \times S^1$ par l'homéomorphisme qui envoie (z_1,z_2) sur $(\sqrt{2}z_1, \frac{z_2}{|z_2|})$ et qui commute avec les identifications est encore un tore plein. Choisissons un entier $\overline{q}$ (l'inverse de q modulo p) tel que $(q\overline{q}-1)$ soit multiple de p. L'application

$$(z_1,z_2) \mapsto (z_1 z_2^{-\overline{q}}, z_2^p)$$

passe au quotient pour définir un homéomorphisme du quotient du tore plein vers le tore plein standard dont le méridien est l'image du méridien $(z \mapsto (z,1))$. De la même manière, le quotient de l'autre tore plein du scindement est un tore plein dont le méridien est l'image de la courbe $(z \mapsto (1,z))$ c'est-à-dire la courbe $(z \mapsto (z^{-\overline{q}}, z^p))$. On obtient ainsi un homéomorphisme entre le quotient de S^3 ci-dessus et $L(p,\overline{q})$. On conclut en remarquant que l'homéomorphisme de S^3 qui envoie (z_1,z_2) sur (z_2,z_1) passe au quotient pour définir un homéomorphisme de $L(p,q)$ vers $L(p,\overline{q})$. On peut aussi remarquer qu'après cette question, la question 1 devient évidente.

En général, on peut voir toute 3-variété comme un Σ_g-système y dessiné sur un corps en anses.

Le Σ_g-système d'un scindement de Heegaard peut aussi se représenter sur un disque. Il suffit pour cela de couper $\Sigma_g^{(1)}$ le long des courbes x_i, ce qui transforme Σ_g en un disque à (2g-1) trous.



La sphère de Poincaré représentée par un scindement de Heegaard de genre 2

La figure précédente montre un scindement de Heegaard de la sphère de Poincaré $SO(3)/\mathcal{A}_5$ telle qu'elle apparaît (aux notations près) dans [P2, fig. 4] comme un exemple de sphère d'homologie de dimension 3 distincte de S^3. Une *sphère d'homologie* est une 3-variété où tout nœud (plongement de S^1) borde une surface (compacte, à bord!) plongée.

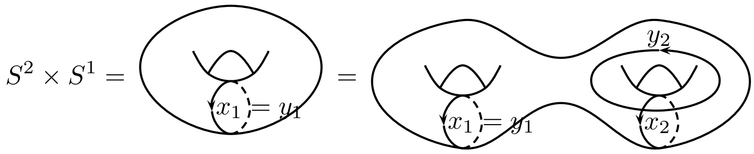
Poincaré avait conjecturé en 1900 [P1] qu'une telle sphère devait nécessairement être homéomorphe à S^3 avant de publier ce contre-exemple sous la forme de cette figure. Il avait alors transformé sa question en demandant si une sphère d'homotopie devait nécessairement être homéomorphe à S^3 -une 3-variété M (compacte, sans bord) est une *sphère d'homotopie* si et seulement si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes, (1) tous les groupes d'homotopie de M sont égaux à ceux de S^3, (2) $\pi_1(M) = 1$, ou, (3) tout plongement de S^1 dans M s'étend en une application continue du disque dans M-. Cette question connue sous le nom de *conjecture de Poincaré* est sans doute la question la plus célèbre de la topologie de dimension 3, elle reste ouverte.

Deux scindements de Heegaard d'une 3-variété M sont dits *isomorphes* si il existe un homéomorphisme de M qui transforme le premier corps en anses d'un scindement en le premier corps en anses de l'autre. Par exemple, tous les scindements de genre 1 de S^3 sont isomorphes.

La *somme connexe de deux n-variétés* M_1 et M_2 est définie comme suit :

$$M_1 \sharp M_2 \stackrel{\text{déf}}{=} (M_1 \setminus \mathrm{Int}(B^n)) \cup_{S^{n-1}} (M_2 \setminus \mathrm{Int}(B^n))$$

La *somme connexe de deux scindements de Heegaard* $H_{11} \cup_{\Sigma_1} H_{21}$ et $H_{12} \cup_{\Sigma_2} H_{22}$ est définie de sorte que (1) la boule B_i enlevée à chacune des variétés M_i scindées coupe la surface Σ_i du scindement selon un disque équatorial $B_i \cap \Sigma_i$ qui partage la boule en deux demi-boules $B_i \cap H_{1i}$ et $B_i \cap H_{2i}$ et (2) le recollement identifie $\partial(B_1 \cap H_{11}) \setminus \mathrm{Int}(B_1 \cap \Sigma_1)$ à $\partial(B_2 \cap H_{12}) \setminus \mathrm{Int}(B_2 \cap \Sigma_2)$. La somme connexe est ainsi naturellement scindée par la somme connexe des surfaces Σ_1 et Σ_2. Une *stabilisation d'un scindement de Heegaard* est la somme connexe de ce scindement avec le scindement de genre 1 de S^3. Graphiquement, on peut voir une stabilisation comme l'opération qui permet de passer du premier scindement de $S^2 \times S^1$ au deuxième sur la figure suivante.



Deux scindements de Heegaard de $S^2 \times S^1$

Théorème 1.22 (Reidemeister-Singer (1933)) *Deux scindements de Heegaard d'une même variété deviennent isomorphes après un nombre fini de stabilisations élémentaires.*

Références pour la démonstration : On aurait pu montrer l'existence des décompositions de Heegaard à partir d'une bonne fonction de Morse sur la variété M, à l'aide de la théorie de Morse-Smale décrite dans le chapitre 6 de [Hi]. Dans ce contexte, le théorème de Reidemeister-Singer est conséquence de l'étude de l'espace des fonctions de Morse de Cerf [Cerf]. Siebenmann a donné une démonstration de ce théorème au moyen des triangulations dans [S]. $\diamond$

Remarquons que l'existence des scindements de Heegaard et ce théorème fournissent une définition des 3-variétés.

Soit Σ_g une surface orientée, soit $x = (x_i)_{i=1,\dots,g}$ et $y = (y_i)_{i=1,\dots,g}$ deux Σ_g-systèmes, et soit H_1 et H_2 deux corps en anses de genre g orientés, on notera

$$M(x,y) = H_1 \cup \phi_2^{-1} \circ \phi_1 H_2$$

où $\phi_1 : \partial H_1 \longrightarrow \Sigma_g$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation tel que $\phi_1^{-1}(x_i)$ borde un disque dans H_1 pour tout i, et $\phi_2 : \partial H_2 \longrightarrow \Sigma_g$ est un difféomorphisme qui renverse l'orientation tel que $\phi_2^{-1}(y_i)$ borde un disque dans H_2 pour tout i. $M(x,y)$ hérite alors des orientations de H_1 et H_2.

Lemme 1.23 *Avec les notations ci-dessus, si les courbes x_1 et y_1 se rencontrent exactement en un point où elles se coupent transversalement, alors le scindement $M(x,y)$ est isomorphe à une stabilisation élémentaire d'un scindement de genre $(g-1)$.*

Démonstration : Soit D_x un disque plongé dans H_1 bordé par x_1 et soit B_1 une boule de dimension 3 qui intersecte H_1 selon un voisinage tubulaire $D_x \times I$ de D_x dans H_1 et qui intersecte H_2 comme un petit voisinage tubulaire de x_1 dans la variété $M(x,y)$. Soit D_y un disque plongé dans H_2 bordé par y_1 et soit B_2 une boule de dimension 3 qui intersecte H_2 selon un voisinage tubulaire $D_y \times I$ de D_y dans H_2 et qui intersecte H_1 comme un petit voisinage tubulaire de y_1 dans la variété $M = M(x,y)$. On peut de plus supposer et on suppose que $B = B_1 \cup B_2$ et $B_1 \cap B_2$ sont deux boules de dimension 3. Nous allons voir que

$$(B \cap H_1) \cup_{B\cap\Sigma_g} (B \cap H_2)$$

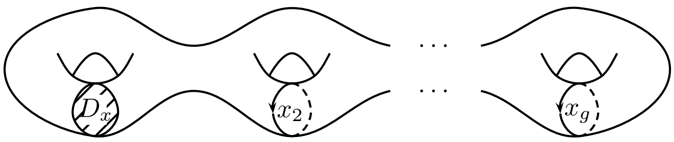
est le scindement de Heegaard de genre 1 de S^3 privé d'une boule qu'il scinde de manière standard le long de son disque équatorial, et que

$$((M \setminus \mathrm{Int}(B)) \cap H_1) \cup_{(M\setminus\mathrm{Int}(B))\cap\Sigma_g} ((M \setminus \mathrm{Int}(B)) \cap H_2)$$

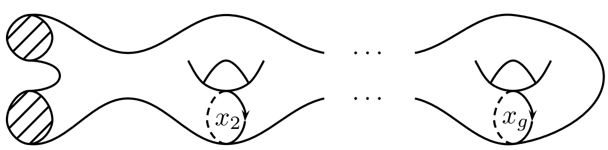
est un scindement de Heegaard de M de genre $(g-1)$ privé d'une boule qu'il scinde de manière standard le long de son disque équatorial. $B \cap H_1$ est la réunion d'un tore plein demi-voisinage tubulaire de y dans M et d'une boule $D_x \times I$ qui s'intersectent en une boule. C'est donc un tore plein de longitude y et de méridien x (et aussi un tore plein privé d'une boule). $B \cap \Sigma_g$ est la réunion d'un anneau voisinage tubulaire de y dans Σ_g et d'un anneau $x \times I$ voisinage tubulaire de x dans Σ_g qui s'intersectent sur un carré au voisinage de leur point d'intersection sur Σ_g. C'est le complémentaire d'un disque ouvert dans le bord du tore plein $B \cap H_1$. Le méridien du tore plein $B \cap H_2$ est bien recollé le long d'une longitude y du tore plein $B \cap H_1$, et on a fini de reconnaître que $(B \cap H_1 \cup_{B\cap\Sigma_g} B \cap H_2)$ est le scindement de genre 1 de S^3 privé d'une boule qui l'intersecte bien.

$H_1' = ((M \setminus \mathrm{Int}(B)) \cap H_1)$ est obtenu en enlevant d'abord $D_x \times \mathrm{Int}(I)$ à H_1, ce qui produit un corps en anses de genre $(g-1)$, puis en "rognant" l'intersection du voisinage tubulaire de y avec ce corps en anses ce qui ne change pas son type topologique.

$H_1 =$



$H_1 \setminus (D_x \times \mathrm{Int}(I)) =$



Ainsi H_1' est un corps en anses de genre $(g-1)$. Il intersecte Σ_g selon son bord privé d'un disque : Ce disque est formé des deux disques de $D_x \times \partial I$ (hachurés sur le dessin) connectés par une bande voisinage tubulaire de $(y \setminus (\text{voisinage de } x \cap y))$. On finit alors facilement de reconnaître que

$$((M \setminus \mathrm{Int}(B)) \cap H_1) \cup_{(M\setminus\mathrm{Int}(B))\cap\Sigma_g} ((M \setminus \mathrm{Int}(B)) \cap H_2)$$

est un scindement de genre $(g-1)$ de M privé d'une boule qui l'intersecte bien, et que le scindement $M(x,y)$ en est une stabilisation.

◇

1.4 Présentations de chirurgie des variétés de dimension 3

Soit M une 3-variété. Un *nœud* K de M est une classe d'isotopie de plongements du cercle S^1 dans M. Si une 3-variété M, un (représentant de) nœud K de M, et une courbe simple μ fermée non séparante sur le bord d'un voisinage tubulaire $T(K)$ de K nous sont donnés, nous pouvons construire la *variété* $\chi(M;(K,\mu))$ *obtenue à partir de* M *par chirurgie sur* (K,μ) comme suit. Nous enlevons l'intérieur de $T(K)$ de M et nous le remplaçons par un tore plein $D^2\times S^1$ recollé le long du bord $\partial T(K)$ de $T(K)$ par un homéomorphisme de $\partial T(K)$ dans $\partial(D^2\times S^1)$ qui envoie μ sur $\partial D^2\times\{1\}$.

$$\chi(M;(K,\mu)) = (M\setminus \mathrm{Int}(T(K))) \cup_{\substack{\partial T(K)\sim\partial(D^2\times S^1)\\ \mu\sim\partial D^2\times\{1\}}} D^2\times S^1$$

La variété $\chi(M;(K,\mu))$ ainsi définie ne dépend que des classes d'isotopie de K, de son voisinage tubulaire et de la courbe μ sur $\partial T(K)$. (Rappelons qu'elle est obtenue en recollant un disque épaissi à $(M\setminus \mathrm{Int}(T(K)))$ le long d'un anneau autour de μ dans $\partial T(K)$, et, en remplissant la sphère S^2 qui apparait sur le bord de la variété par une boule standard B^3 de dimension 3.)

On dit que (K,μ) est un *nœud pondéré.* Si μ est un *parallèle* de K, c'est-à-dire si la valeur absolue de son nombre d'intersection algébrique avec le méridien de $T(K)$ sur $\partial T(K)$ est 1, la pondération et la chirurgie sont dites *entières.* Un *entrelacs* de M est une classe d'isotopie de plongements d'une réunion disjointe de cercles dans M. Une collection de nœuds pondérés disjoints est un *entrelacs pondéré.* On généralise naturellement la chirurgie sur les nœuds pondérés à la chirurgie sur des entrelacs pondérés en effectuant simultanément la chirurgie sur toutes les *composantes* (nœuds) de l'entrelacs. (On choisit alors bien sûr alors des voisinages tubulaires -qu'on peut toujours rétrécir- disjoints pour des composantes différentes.)

On appelle *extérieur* d'un entrelacs le complémentaire de l'intérieur d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs.

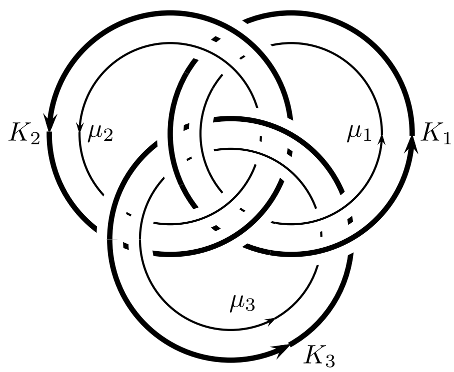
Exemple 1.24 On appelle *méridien* d'un nœud le méridien d'un tore plein voisinage tubulaire de ce nœud. Si, dans la définition ci-dessus, μ est un méridien de K, alors $\chi(M;(K,\mu)) = M$.

Exemple 1.25 Soit U le *nœud trivial* de S^3, c'est-à-dire le bord d'un disque plongé dans S^3 et soit μ_0 son parallèle obtenu comme intersection du bord du voisinage tubulaire (bien choisi) avec le disque. Alors

$$\chi(S^3;(U,\mu_0)) = (S^2\times S^1).$$

Les variétés obtenues par chirurgie sur le nœud trivial de S^3 sont les variétés qui admettent un scindement de Heegaard de genre 1.

Exemple 1.26 On va voir que la variété obtenue par chirurgie sur l'entrelacs pondéré suivant est $(S^1)^3$.

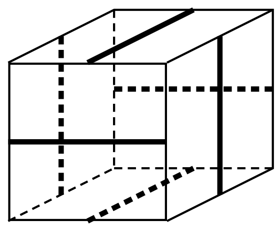


Le tracé épais ci-dessus représente un plongement de la réunion disjointe de trois cercles à isotopie *à support compact* (c'est-à-dire qui fixe l'extérieur d'un compact donné en tout temps) près dans l'espace ambiant $\mathbf{R}^3\subset S^3=\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$. Ce tracé épais représente donc un plongement de la réunion disjointe de trois cercles à isotopie près dans S^3. L'entrelacs ci-dessus est appelé *entrelacs borroméen.*

Voyons d'abord que la sphère S^3 munie de l'entrelacs borroméen est homéomorphe au quotient suivant du cube

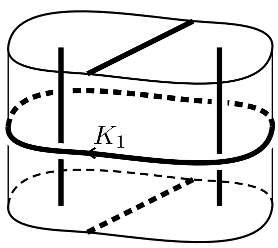
$$[-1,1]^3 = \{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ |x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1,\ |x_3| \leq 1\}.$$

On munit chaque face du cube d'une arête médiane (en gras sur le dessin) de sorte que deux faces opposées aient des arêtes médianes opposées et que les arêtes médianes distinctes ne s'intersectent pas. (L'arête médiane d'une face $x_i = \pm 1$ est son intersection avec le plan $(x_{i+1} = 0)$, $(i+1)$ étant entendu modulo 3 -par exemple-.)

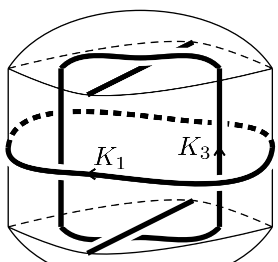


On plie ensuite les faces selon les arêtes en gras, c'est-à-dire que l'on identifie deux points d'une même face qui sont orthogonalement symétriques par rapport à l'arête médiane distinguée de cette face. Par exemple, si $x_1 = \pm 1$, (x_1,x_2,x_3) est identifié à $(x_1,-x_2,x_3)$. Nous allons reconnaître le quotient du cube comme S^3 et l'image des arêtes médianes par l'application quotient comme un plongement de l'entrelacs borroméen.

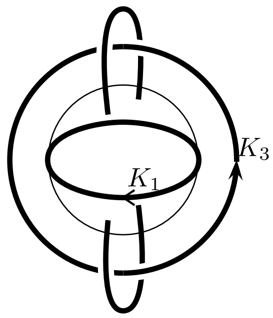
Commençons par effectuer les recollements des faces latérales.



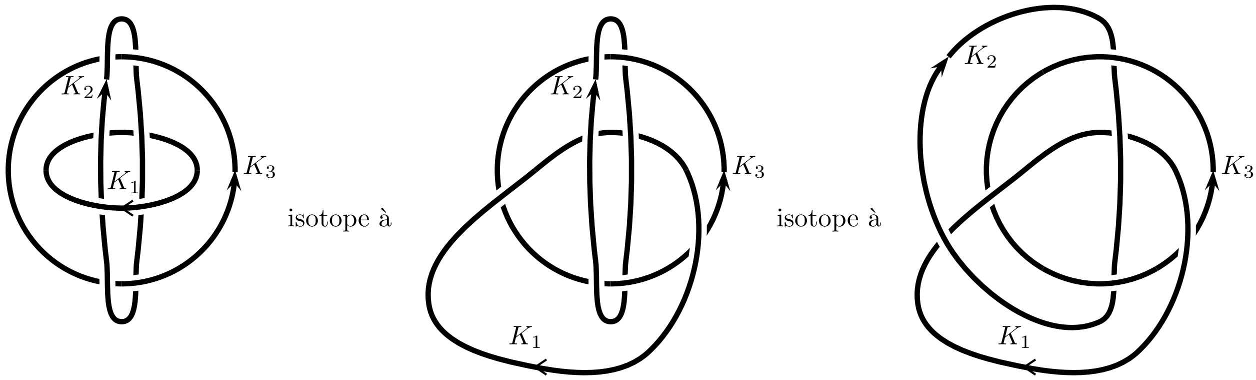
Effectuons maintenant les recollements de la face du dessous et de la face du dessus.



Avant d'effectuer les derniers recollements, nous enlevons l'origine et effectuons l'inversion de $\mathbf{R}^3$ par rapport à l'origine (qui envoie (x_1,x_2,x_3) sur $\frac{(x_1,x_2,x_3)}{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$). Cette opération qui renverse l'orientation transforme le dessin en $\mathbf{R}^3$ privé d'une boule d'équateur K_1 (au centre du dessin).

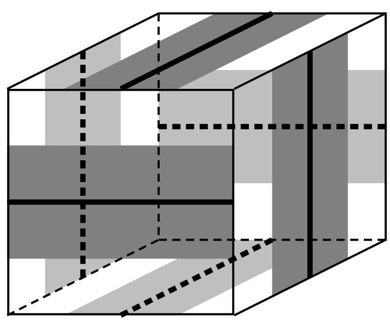


On voit alors que le dernier recollement consiste à identifier les deux hémisphères de la sphère d'équateur K_1, et que l'on obtient bien $\mathbf{R}^3$ muni d'un entrelacs à trois composantes qu'il reste à reconnaître comme l'entrelacs borroméen.



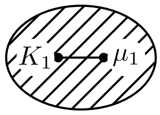
Par composition avec la symétrie orthogonale par rapport au plan du papier qui renverse l'orientation (pour compenser le renversement d'orientation de l'inversion), le dernier dessin donne l'entrelacs borroméen du départ aux numérotations et aux orientations des composantes près[6] qui, ici, sont sans importance.

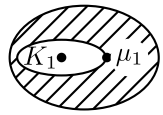
Grisons maintenant la bande $|x_{i+1}| \leq \frac{1}{2}$ autour de l'arête médiane distinguée sur les faces $x_i = \pm 1$.

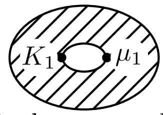


L'image dans S^3 de toutes ces bandes grisées est l'image d'un plongement de trois anneaux $S^1 \times I$ où chaque anneau a une composante de bord qui est un K_i et l'autre composante qui est son parallèle μ_i. (Exercice.) On peut ainsi voir que l'extérieur de l'entrelacs borroméen est obtenu en "décollant" les parties grisées dans le quotient du cube précédemment considéré. En effet, en coupe transverse, on voit le plongement de $S^1 \times I$ comme

[6] Voir Exercice 1.27.

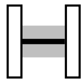


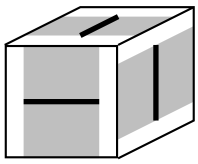
. Enlever l'intérieur du voisinage tubulaire de K_1 transforme notre coupe en 

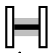
et décoller les parties grisées transforme notre coupe en la coupe équivalente 

.

Autrement dit, l'extérieur de l'entrelacs borroméen est obtenu à partir de notre cube en identifiant deux points d'une même face qui sont orthogonalement symétriques par rapport à l'arête médiane distinguée de cette face seulement si ils ne sont pas dans l'intérieur de la partie grisée. Par exemple, si $x_1 = \pm 1$, (x_1, x_2, x_3) est identifié à $(x_1, -x_2, x_3)$ si et seulement si $|x_2| \geq \frac{1}{2}$. De même, recoller un tore plein de méridien μ_i sur le bord $\partial T(K_i)$ revient à écrire $\partial T(K_i)$ comme la réunion de deux copies de l'anneau $S^1 \times [-1, 1]$ recollées selon leurs bords par l'identité de sorte que μ_i soit la réunion des deux copies de l'intervalle $\{1\} \times [-1, 1]$ puis à identifier ces deux anneaux (par l'identité). Ainsi, pour finir de reconstituer la variété obtenue par chirurgie sur les (K_i, μ_i), il suffit maintenant d'identifier chaque bande grisée à celle d'en face "parallèlement" de sorte que, par exemple, si $x_1 = \pm 1$, et si $|x_2| \leq \frac{1}{2}$, alors (x_1, x_2, x_3) est identifié à $(-x_1, x_2, x_3)$.

Il existe un homéomorphisme du cube qui envoie chaque partie  formée d'une bande grisée et des deux rectangles blancs qui sont adjacents à la bande grisée sans être contenus dans sa face surjectivement sur cette face. Le cube muni de ses parties grisées devient :



(Topologiquement, le cube muni du découpage en faces de son bord est une boule munie du graphe trivalent plongé dans son bord formé de ses arêtes et de ses sommets. Le cube muni du graphe image de la réunion des bords de nos  est un plongement isotope du même graphe trivalent dans le bord de la boule. On choisit une isotopie qui respecte les symétries de la situation. Ceci nous produit la restriction de l'homéomorphisme du cube cherché au bord, et nous savons que la connaissance de cette restriction suffit à conclure grâce au lemme d'Alexander.) Cet homéomorphisme appliqué, les identifications apparient maintenant deux faces opposées parallèlement : c'est-à-dire que par exemple, si $x_1 = \pm 1$, alors (x_1, x_2, x_3) est identifié à $(-x_1, x_2, x_3)$. Ainsi la variété chirurgisée n'est autre que

$$\left(\frac{[-1,1]}{-1 \sim 1}\right)^3 = \left(S^1\right)^3.$$

Exercice 1.27 On appelle *image miroir* d'un entrelacs de $\mathbf{R}^3$ l'entrelacs obtenu en composant un plongement le représentant par une symétrie hyperplane de $\mathbf{R}^3$. Un entrelacs est dit *amphichiral* si il est isotope à son image miroir.
Soit $\mathcal{B}$ l'entrelacs borroméen numéroté et orienté comme dans sa première présentation. L'entrelacs $\mathcal{B}$ est évidemment inchangé si l'on permute cycliquement sa numérotation. Soit $\mathcal{B}'$ l'entrelacs obtenu à partir de $\mathcal{B}$ en effectuant une permutation impaire de sa numérotation.
Montrer que $\mathcal{B}$ est amphichiral. Montrer que les entrelacs orientés et numérotés qui se déduisent de $\mathcal{B}$ par des changements d'orientations, de numérotations des composantes et/ou par image miroir sont tous isotopes à $\mathcal{B}$ ou à $\mathcal{B}'$.

Les chirurgies possèdent les propriétés évidentes suivantes.

Propriété 1.28 *Soit $\mathbf{L}_1$ un entrelacs pondéré d'une 3-variété M_1 et soit $\mathbf{L}_2$ un entrelacs pondéré d'une 3-variété M_2, on peut alors voir la réunion $\mathbf{L}_1 \coprod \mathbf{L}_2$ de $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ comme un entrelacs pondéré de $M_1 \sharp M_2$ (en* *enlevant les boules ouvertes hors des voisinages tubulaires des entrelacs), et,*

$$\chi(M_1 \sharp M_2; \mathbf{L}_1 \coprod \mathbf{L}_2) = \chi(M_1; \mathbf{L}_1) \sharp \chi(M_2; \mathbf{L}_2).$$

Exemple 1.29 En particulier, si U est le *nœud trivial* d'une variété M, c'est-à-dire le bord d'un disque plongé D dans M et si μ_0 est son parallèle obtenu comme intersection du bord du voisinage tubulaire (bien choisi) avec le disque. Alors

$$\chi(M; (U, \mu_0)) = M \sharp (S^2 \times S^1).$$

Notation 1.30 Soit $\mathbf{L}$ un entrelacs pondéré d'une 3-variété M. Alors, les *âmes* ($S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times D^2$) des tores pleins recollés lors de la chirurgie sur $\mathbf{L}$ qui transforme M en $\chi(M; \mathbf{L})$ forment un entrelacs de $\chi(M; \mathbf{L})$ qu'on notera $\hat{L}$. L'extérieur de $\hat{L}$ dans $\chi(M; \mathbf{L})$ est bien sûr égal à l'extérieur de L dans M. On voit sur le bord de cet extérieur les courbes μ_i qui pondérent L et les méridiens m_i des composantes K_i de L. On notera $\hat{\mathbf{L}}$, l'entrelacs $\hat{L}$ pondéré par les courbes m_i. On a alors

$$\chi(\chi(M; \mathbf{L}); \hat{\mathbf{L}}) = M$$

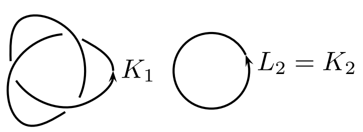
et la chirurgie sur $\hat{\mathbf{L}} \subset \chi(M; \mathbf{L})$ est appelée *chirurgie inverse* de la chirurgie précédente. Remarquons que l'inverse d'une chirurgie entière est une chirurgie entière puisqu'une chirurgie est entière si les deux méridiens (ici m_i et μ_i) des tores pleins qui remplissent l'extérieur d'un nœud avant et après chirurgie ont un nombre d'intersection algébrique égal à ± 1.

Propriété 1.31 *Soit $\mathbf{L}_1$ un entrelacs pondéré d'une 3-variété M_1 et soit $\mathbf{L}_2$ un entrelacs pondéré de $\chi(M_1; \mathbf{L}_1)$, on peut alors isotoper $\mathbf{L}_2$ dans $\chi(M_1; \mathbf{L}_1)$ pour le transformer en un entrelacs $\tilde{\mathbf{L}}_2$ disjoint de l'entrelacs ($\hat{L}_1 \subset \chi(M_1; \mathbf{L}_1)$) et donc de son voisinage tubulaire. Ainsi, $\tilde{\mathbf{L}}_2$ est aussi un entrelacs de M_1 et*

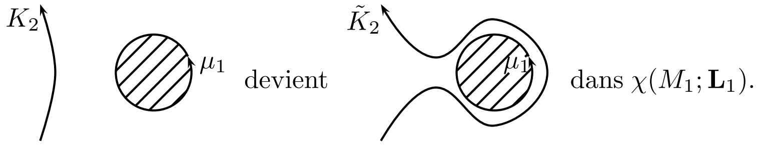
$$\chi(\chi(M_1; \mathbf{L}_1); \mathbf{L}_2) = \chi(M_1; \mathbf{L}_1 \coprod \tilde{\mathbf{L}}_2).$$

Exemple 1.32 Attention, dans la propriété ci-dessus, la classe d'isotopie de $\tilde{\mathbf{L}}_2$ dans M_1 dépend de l'isotopie effectuée dans $\chi(M_1; \mathbf{L}_1)$. (On a fait un choix.) En effet, considérons l'exemple suivant où

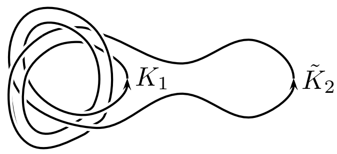
- $M_1 = S^3 = \mathbf{R}^3 \cup \infty$,
- L_1 a une seule composante K_1 qui est le *nœud de trèfle droit* pondéré par son parallèle sur le dessin,
- $\mathbf{L}_2$ est le nœud trivial pondéré par son parallèle sur le dessin vu comme un nœud pondéré de $\chi(M_1; \mathbf{L}_1)$.



Alors, dans $\chi(M_1; \mathbf{L}_1)$, on peut faire une isotopie de K_2 à travers le disque bordé par μ_1, qui transforme K_2 en $\tilde{K}_2$ comme suit :



Ceci a, par exemple, transformé la trace de K_2 dans $M_1 = S^3$ en $\tilde{K_2}$, comme sur la figure ci-dessous :



En particulier, $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ et $(\mathbf{K}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2)$ où les nœuds sont munis de leurs parallèles sur le dessin, sont deux présentations de chirurgie différentes de la même variété.

Remarquons que la propriété 1.31 finit de montrer que la relation "être obtenue par chirurgie entière à partir de" est une relation d'équivalence sur les 3-variétés. Nous allons montrer que toutes les 3-variétés sont équivalentes par cette relation. Pour cela, nous aurons besoin du lemme qui suit.

Lemme 1.33 *Soit x, y et z trois Σ_g-systèmes. Soit Z l'entrelacs à pondération entière de $M(x,y)$ formé des courbes du système z munies chacune de son[7] parallèle sur la surface du scindement. Alors*

$$\chi(M(x,y); Z) = M(x,z) \sharp M(z,y)$$

Démonstration : Soit H_x, H_y et H_z trois corps en anses de genre g de systèmes de méridiens respectifs x, y et z. Notons

$$\Sigma = \Sigma_g = \partial H_x = \partial H_y = \partial H_z,$$

où les égalités ci-dessus signifient que toutes les surfaces impliquées sont identifiées par des homéomorphismes qui préservent les orientations et qui respectent les systèmes de méridiens. Ces identifications fixées nous permettent d'écrire simplement :

$$M(x,y) = H_x \cup_\Sigma -H_y.$$

Comme dans l'exemple de la chirurgie sur les anneaux borroméens, on construit l'extérieur de l'entrelacs z en décollant ∂H_x et ∂H_y le long de l'intérieur d'un voisinage tubulaire $z\times]-1,1[$ de z dans la surface Σ.

$$M(x,y) \setminus \mathrm{Int}(T(z)) = H_x \cup_{\Sigma\setminus(z\times]-1,1[)} -H_y$$

Puis, pour chaque courbe z_i, on attache

$$D_i \times S^1 = D_i \times [-1,1]_x \cup_{(D_i\times\{-1,1\}_x)\sim(D_i\times\{-1,1\}_y)} D_i \times [-1,1]_y$$

sur $M(x,y) \setminus \mathrm{Int}(T(z))$ de sorte que, pour $u = x$ ou $u = y$, $\partial D_i \times \{t\}_u$ soit identifié à

$$z_i \times \{t\}_u \subset z_i \times [-1,1]_u \subset \partial H_u.$$

(Les indices x et y attribués à $[-1,1]$ ne sont là que pour distinguer des copies identiques de $D_i \times [-1,1]$, puis pour nous indiquer de quel côté les attacher.) On obtient ainsi

$$\chi(M(x,y); Z) = \left(H_x \cup_{z_i\times[-1,1]_x\subset\partial H_x} D_i \times [-1,1]_x\right) \cup_S \left(-H_y \cup_{z_i\times[-1,1]_y\subset\partial H_y} D_i \times [-1,1]_y\right)$$

où la partie S commune aux deux parties de la décomposition ci-dessus est

$$S = \Sigma \setminus (z\times]-1,1[) \cup_{z\times\{-1,1\}} (\cup_{i=1}^g D_i \times \{-1,1\})$$

c'est-à-dire la sphère S^2 vue comme le "remplissage" par $2g$ disques d'une sphère privée de $2g$ disques ouverts, et où les deux parties de la décomposition sont respectivement $(M(x,z) \setminus \mathrm{Int}(B^3))$ et $(M(z,y) \setminus \mathrm{Int}(B^3))$. $\diamond$

Nous pouvons maintenant présenter la démonstration élégante de Rourke [Ro] du théorème qui suit et qui nous motive pour l'étude des chirurgies.

[7] Les deux parallèles ne font qu'un parce qu'ils sont isotopes sur les bords des voisinages tubulaires.

Théorème 1.34 (Lickorish [Li], Wallace [W] 1960) *Toute 3-variété peut être obtenue à partir de la sphère standard S^3 de dimension 3 par chirurgie sur un entrelacs à pondération entière.*

Démonstration : Nous raisonnons par récurrence sur le genre minimum g d'un scindement de Heegaard de la variété. Si $g = 0$, la variété est S^3 et nous avons fini. Fixons g et supposons que toutes les variétés qui admettent un scindement de genre strictement inférieur à g s'obtiennent par chirurgie entière à partir de S^3. Nous voulons montrer que toute variété qui s'écrit $M(x, y)$ où x et y sont deux Σ_g-systèmes transverses s'obtient par chirurgie entière à partir de S^3. Nous posons

$$c(x, y) = \min_{(i,j)\subset\{1,...,g\}^2} |(\sharp(x_i \cap y_j))^2 - 1|$$

où $\sharp(x_i \cap y_j)$ est le nombre de points d'intersection entre x_i et y_j, et nous raisonnons par récurrence sur $c(x, y)$. Si $c(x, y)$ est nul, il existe une courbe x_i qui coupe une courbe y_j en un point et $M(x, y)$ a un scindement de genre plus petit d'après le lemme 1.23. Sinon, nous utilisons le lemme suivant dont nous reportons la démonstration à la fin de la démonstration du théorème.

Lemme 1.35 *Pour tout couple (x, y) de Σ_g-systèmes transverses tel que $c(x, y)$ est non nul, il existe un Σ_g-systeme z tel que $c(x, z)$ et $c(y, z)$ soient strictement inférieurs à $c(x, y)$.*

Ce lemme nous permet de conclure comme suit par récurrence sur $c(x, y)$. La variété $\chi(M(x, y); Z) = M(x, z)\sharp M(z, y)$ du lemme 1.33 construite à l'aide du sytème z du lemme ci-dessus est somme connexe de deux variétés qui s'obtiennent par chirurgie à partir de S^3, par hypothèse de récurrence. D'après la propriété 1.28 (appliquée dans le cas $M_1 = M_2 = S^3$), $\chi(M(x, y); Z)$ s'obtient donc par chirurgie à partir de S^3. Ainsi, comme la relation "être obtenue par chirurgie entière à partir de" est une relation d'équivalence, $M(x, y)$ s'obtient aussi par chirurgie à partir de S^3. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer le lemme.
Démonstration du lemme : Appelons $a = x_i$ et $b = y_j$, les courbes qui réalisent le minimum $c(x, y)$, c'est-à-dire les courbes simples fermées non séparantes telles que

$$c(x, y) = |(\sharp(a \cap b))^2 - 1|.$$

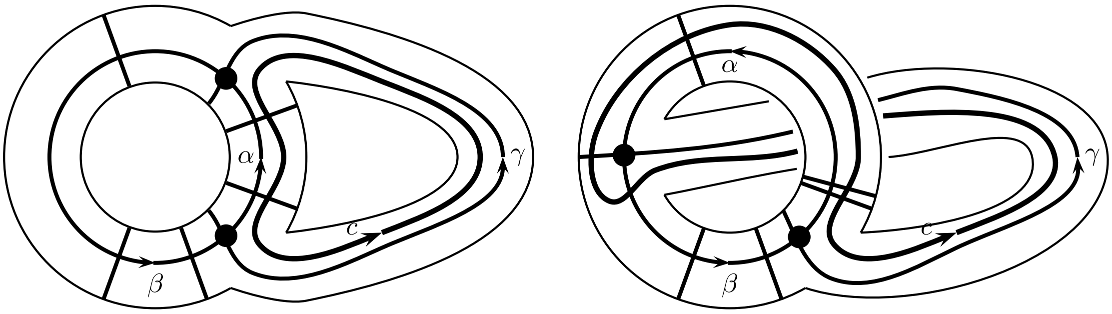
Il nous suffit, étant données ces deux courbes (simples fermées) non séparantes a et b telles que $\sharp(a \cap b) \neq 1$, de trouver une courbe (simple fermée) c non séparante telle que

$$|(\sharp(a \cap c))^2 - 1| < |(\sharp(a \cap b))^2 - 1| \;\text{ et }\; |(\sharp(b \cap c))^2 - 1| < |(\sharp(a \cap b))^2 - 1|$$

qu'on pourra ensuite compléter en un Σ_g-système grâce au lemme 1.19.

Supposons d'abord $\sharp(a \cap b) \geq 2$, et cherchons une courbe c telle que $\sharp(a \cap c) < \sharp(a \cap b)$ et $\sharp(b \cap c) < \sharp(a \cap b)$ qui résoudra le problème. Soit $\gamma \subset b$ un arc (plongement d'un intervalle $[0, 1]$) de b dont l'intérieur ne rencontre pas a et dont les extrémités sont deux points de $a \cap b$. Ces extrémités scindent a en la réunion deux arcs α et β, dont l'un α est tel que $\alpha \cup \gamma$ ne sépare pas $\Sigma = \Sigma_g$. (En effet, si $\alpha \cup \gamma$ et $\beta \cup \gamma$ séparaient Σ, alors l'intérieur de α serait dans l'une des deux composantes de $\Sigma \setminus (\beta \cup \gamma)$ et la séparerait, mais dans ce cas absurde, $a = \alpha \cup \beta$ séparerait Σ.)

On va alors dessiner un voisinage de $a \cup \gamma$ dans Σ. Le voisinage tubulaire de a est un anneau $a \times I = S^1 \times I$, et le voisinage de γ est une bande rectangulaire rattachée sur cet anneau. Deux cas se présentent (quitte à rétrécir l'anneau). Soit γ rencontre une seule composante de bord de l'anneau $a \times I$, soit γ rencontre les deux composantes de bord de cet anneau. Ces deux cas sont représentés sur la figure suivante en même temps qu'une courbe simple fermée non séparante c telle que $\sharp(a \cap c) < \sharp(a \cap b)$ et $\sharp(b \cap c) < \sharp(a \cap b)$ qui conclut le traitement du cas $\sharp(a \cap b) \geq 2$.



Rappelons que $a = \alpha \cup \beta$. Sur la figure, les arcs qui coupent a représentent les voisinages dans b de points de $a \cap b$.

Le cas $\sharp(a \cap b) \geq 2$ étant traité, il ne nous reste plus qu'à traiter le cas $\sharp(a \cap b) = 0$ et à chercher dans ce cas une courbe simple fermée non séparante c telle que $\sharp(a \cap c) = \sharp(c \cap b) = 1$ qui résoudra le problème. On coupe Σ selon a.

- Si b sépare $\Sigma \setminus (a \times]-1,1[)$, alors $a \times \{1\}$ et $a \times \{-1\}$ sont dans deux composantes distinctes de $\Sigma \setminus (a \times]-1,1[)$ puisque b ne sépare pas Σ. Dans ce cas, il existe un arc simple de $\Sigma \setminus (a \times]-1,1[)$ qui joint $a \times \{1\}$ et $a \times \{-1\}$ en coupant b exactement une fois. On complète alors aisément cet arc dans $a \times]-1,1[$ en une courbe c qui a les propriétés voulues.

- Si b ne sépare pas $\Sigma \setminus (a \times]-1,1[)$, alors $\Sigma \setminus ((a \coprod b) \times]-1,1[)$ est une surface connexe à quatre composantes de bord. On peut donc choisir sur cette surface un arc simple qui joint $a \times \{1\}$ à $b \times \{1\}$. Un tel arc ne disconnectant pas, on peut choisir un autre arc simple disjoint du premier qui joint $a \times \{-1\}$ à $b \times \{-1\}$. On complète alors ces arcs dans $(a \coprod b) \times]-1,1[$ en une courbe c qui a les propriétés voulues.

ce qui achève la démonstration du lemme et donc celle du théorème. $\diamond$

Soit K un nœud dans M. Un voisinage tubulaire $T(K)$ de K dans M est l'image d'un plongement ϕ de $S^1 \times D^2$ dans M tel que l'image de $\phi(.,0)$ soit un représentant de K. La connaissance d'un tel plongement (et plus seulement de son image) nous fournit le méridien de K image de $\big(z \in S^1 \mapsto \phi(1,z)\big)$ et un parallèle (aussi appelé *longitude* de K) image de $\big(z \in S^1 \mapsto \phi(z,1)\big)$. Un tel plongement est appelé *trivialisation* de de $T(K)$. De plus, en admettant que le nombre d'intersection algébrique de deux courbes sur un tore ne dépend que de leurs classes d'isotopie (ce qu'on verra dans le prochain chapitre), à isotopie et à orientation près, toute longitude est de la forme image de $\big(z \in S^1 \mapsto \phi(z, z^k)\big)$ pour un tel plongement ϕ, et donc de la forme $\tilde{\phi}(z,1)$ pour un plongement $\tilde{\phi}$ de la même forme (composé du précédent par $\big((z_1,z_2) \mapsto (z_1, z_2 z_1^k)\big)$.

Théorème 1.36 (Rohlin, Thom, 1952) *Toute 3-variété borde une variété de dimension 4 compacte orientable lisse.*

DÉMONSTRATION : Soit M une 3-variété et soit $\mathbf{L}$ une *présentation de chirurgie entière* de M sur S^3, c'est-à-dire un entrelacs $\mathbf{L}$ à pondération entière de S^3 tel que $\chi(S^3;\mathbf{L}) = M$, dont l'entrelacs sous-jacent L a k composantes. Soit $\phi : \coprod_{i=1}^k (S^1 \times D^2)_i \hookrightarrow S^3$ une trivialisation du voisinage tubulaire de L induisant les parallèles définissant la chirurgie. Alors M est le bord de la variété orientable compacte $W_{\mathbf{L}}$

$$W_{\mathbf{L}} = \coprod_{i=1}^{k} (D^2 \times D^2)_i \cup_{\coprod_{i=1}^k (S^1 \times D^2)_i \overset{\phi}{\subset} S^3 = \partial B^4} B^4$$

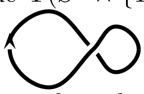
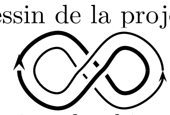
qui peut être rendue lisse de manière standard. (Rappelons que $\partial(D^2 \times D^2) = D^2 \times S^1 \cup_{S^1 \times S^1} S^1 \times D^2$.) $\diamond$

Il résulte de l'analyse précédente des parallèles que, pour tout parallèle λ d'un nœud K, il existe un plongement d'un anneau $S^1 \times I$ dans M (on dit aussi d'une *bande*) dont la restriction à $S^1 \times 0$ représente le nœud et dont la restriction à $S^1 \times 1$ représente son parallèle[8]. Réciproquement, on peut voir que la donnée d'une telle bande détermine une trivialisation du voisinage tubulaire à isotopie près, et, par conséquent, la chirurgie entière associée.

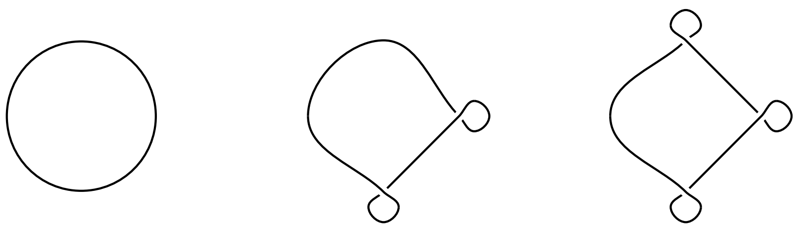
Supposons que la projection orthogonale d'un plongement $\psi : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de nœud de $\mathbf{R}^3 = S^3 \setminus \infty$ dans une direction de vecteur $\vec{v}$ est *régulière*[9], c'est à dire est une immersion dont les seuls points multiples sont des points doubles transverses . Quitte à effectuer une rotation de $\mathbf{R}^3$ (isotope à l'identité!), on pourra supposer $\vec{v}$ vertical. Dans ce cas, la projection du nœud complétée par la donnée pour chaque point double de l'altitude relative de ses deux préimages codée par l'interruption de la branche qui passe dessous (ou) détermine la classe d'isotopie du plongement. De plus, pour ε assez petit, l'application

$$\Psi : S^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

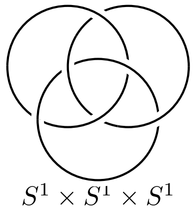
$$(z,t) \mapsto \psi(z) + \varepsilon t \vec{v}$$

est un plongement. Après isotopie, qui fixe l'image de ψ, la projection selon $\vec{v}$ de cette bande est une immersion qui plonge tous les $\{z\} \times I$ et telle que $\Psi(S^1 \times \{1\})$ soit le parallèle sur le dessin de la projection donnée. Par exemple, le parallèle sur le dessin de  est dessiné comme suit :  .

Ainsi, une projection régulière d'entrelacs de $\mathbf{R}^3$ détermine une présentation de chirurgie entière sur cet entrelacs. Rappelons maintenant qu'une trivialisation ϕ du voisinage d'un noeud étant fixée (à isotopie près) par la donnée des bandes précédentes, tout parallèle au nœud est de la forme (image de $\phi(z, z^k)$). Sa bande associée se déduit donc de la bande associée à la projection par $|k|$ opérations locales de la forme " devient " si $k \geq 0$, ou, " devient " si $k \leq 0$. Comme la bande  est équivalente à et comme la bande  est équivalente à , les opérations locales ci-dessus peuvent être réalisées au niveau des projections régulières au moyen d'opérations locales transformant en ou en . Toute présentation de chirurgie entière peut ainsi être représentée par une projection régulière d'entrelacs dans le plan. Ainsi, nous pouvons représenter, par exemple :



$S^2 \times S^1$ $\qquad$ $SO(3)$ $\qquad$ $L(3,-1)$



$S^1 \times S^1 \times S^1$

Pour conclure ce chapitre, nous allons décrire des opérations sur les présentations de chirurgie qui ne modifient pas la variété présentée.

[8]On aurait pu se servir de cette caractérisation pour définir les parallèles.

[9]On peut montrer que les vecteurs unitaires de S^2 qui projettent régulièrement un plongement donné de S^1 dans $\mathbf{R}^3$ forment un ouvert dense de S^2 [Hi].

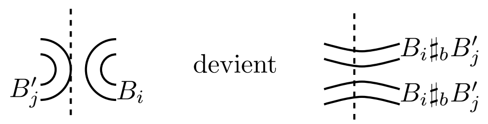
1.5 Quelques opérations sur les présentations de chirurgie.

Nous avons déjà évoqué dans l'exemple 1.32 la possibilité de faire glisser une composante K_i d'une présentation de chirurgie entière $\mathbf{L}$ le long d'un disque méridien d'un futur tore plein recollé lors d'une chirurgie entière sur une autre composante $K_j, j \neq i$ de $\mathbf{L}$.

Cette opération qui ne modifie pas le résultat de la chirurgie est appelée *deuxième mouvement de Kirby.*

Elle peut se décrire comme suit dans le cas d'une chirurgie entière sur K_i. Soit $\phi : S^1 \times [0,1]$ le plongement d'une bande B_j définissant la chirurgie sur K_j. Le deuxième mouvement de Kirby consiste à remplacer les bandes définissant la chirurgie précédente par

- les bandes précédentes associées aux indices différents de i et j,
- la restriction de ϕ à $S^1 \times [0,1/4]$, et,
- une bande $B_i \sharp_b B'_j$ définie comme une *somme en bandes* de la bande associée à K_i et de $B'_j = \phi(S^1 \times [3/4,1])$. Cette bande $B_i \sharp_b B'_j$ est obtenue à partir de la bande B'_j et d'une bande B_i isotope à la bande de K_i dans le complémentaire des autres composantes de la chirurgie et de $\phi(S^1 \times [0,1])$, par la modification locale qui connecte ces deux bandes dans une boule du complémentaire de $\cup_{k \neq i,j} K_k$ comme suit :



où la bande initiale B_j ne coupe la boule représentée sur ces dessins qu'à gauche de la ligne pointillée.

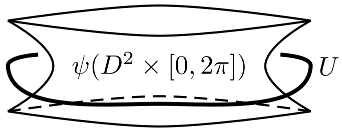
Nous rappelons bien sûr l'exemple déjà donné dans l'exemple 1.32 où la présentation $(\mathbf{K}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2)$ était obtenue à partir de $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ par un second mouvement de Kirby. Notons que l'isotopie de la bande de $\mathbf{K}_2$ aurait pu suivre un chemin très compliqué (qui aurait par exemple beaucoup tourné autour de $\mathbf{K}_1$) avant de venir s'attacher à la bande parallèle à $\mathbf{K}_1$.

Soit maintenant $\mathbf{L}$ un entrelacs pondéré d'une variété M dont une composante $\mathbf{U}$ est un nœud trivial U qui borde un disque D_U et muni d'une courbe μ_U. Considérons un plongement du cylindre

$$\psi : D^2 \times [0,2\pi] \longrightarrow M \setminus \mathrm{Int}(T(U))$$

tel que

$$\psi(S^1 \times [0,2\pi]) \subset \partial T(U).$$



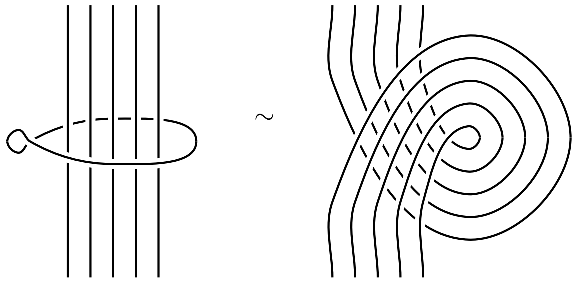
Soit τ l'homéomorphisme de $M \setminus \mathrm{Int}(T(U))$ qui est l'identité en dehors de l'image de ψ, et qui twiste le cylindre autour de son axe selon la formule :

$$\tau(\psi((z,t) \in D^2 \times [0,2\pi])) = \psi(z \exp(it), t).$$

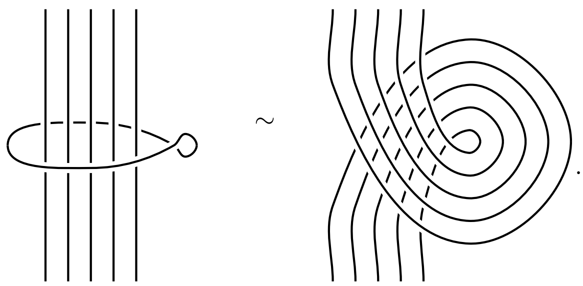
Il est alors clair que $(\tau(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U}), (U, \tau(\mu_U)) \subset M)$ et $\left(\tau^{-1}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U}), (U, \tau^{-1}(\mu_U)) \subset M\right)$ présentent la même variété que $\mathbf{L}$: (L'homéomorphisme τ ou τ^{-1} entre les complémentaires des tores pleins chirurgisés se prolonge!).

Lorsque de plus μ_U est un parallèle de U qui perce une fois le disque bordé par U, alors $\mu_U = \tau^{\varepsilon}(m_U)$ où m_U est le méridien de U et où $\varepsilon = \pm 1$. Dans ce cas, nous appelons *mouvement de Fenn et Rourke* l'opération qui transforme $\mathbf{L}$ en $\tau^{-\varepsilon}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U})$, ou l'inverse d'une telle opération. Il est clair que les mouvements de Fenn et Rourke préservent la variété obtenue par chirurgie. (On a juste oublié la chirurgie triviale définie par le méridien $m_U = \tau^{-\varepsilon}(\mu_U)$.)

Sur une projection régulière, on peut écrire ce mouvement localement comme suit :



ou comme :



Lorsque de plus aucune composante de la présentation de chirurgie ne rencontre le cylindre, ce mouvement qui, sur un dessin de présentation de chirurgie dans S^3, consiste à oublier ou à rajouter une composantes isolée de la forme  ou  est appelé *premier mouvement de Kirby* en l'honneur du théorème suivant démontré par Kirby.

Théorème 1.37 (Kirby [K] 1978) *Deux présentations de chirurgie entière sur S^3 de la même 3-variété s'obtiennent l'une de l'autre par une suite finie de mouvements de Kirby (premier et deuxième).*

Fenn et Rourke ont ensuite montré que les mouvements de Kirby pouvaient être réalisés comme des suites de mouvements de Fenn et Rourke, démontrant ainsi le théorème :

Théorème 1.38 (Fenn-Rourke [FR]) *Deux présentations de chirurgie entière sur S^3 de la même 3-variété s'obtiennent l'une de l'autre par une suite finie de mouvements de Fenn et Rourke.*

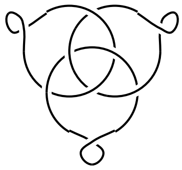
D'après les théorèmes ci-dessus, pour définir un invariant des variétés fermées de dimension 3, il suffit de trouver une fonction des présentations de chirurgie entière invariante par les mouvements de Fenn et Rourke. Faute de bons candidats, ce procédé n'avait pas été utilisé avant 1988. Depuis, bon nombre d'invariants dits nouveaux des variétés de dimension 3 doivent la preuve de leur invariance à ce principe élémentaire ([R-T], [Wa],...), mais l'interprétation topologique des invariants ainsi construits est souvent difficile.

Nous ne nous appuierons pas sur ces théorèmes (que nous ne démontrons donc pas) pour construire les invariants étudiés dans ce cours. Nous utiliserons par contre leur direction évidente que nous avons déjà justifiée. Nous utiliserons aussi le lemme suivant

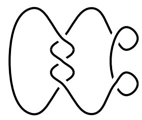
Lemme 1.39 *Si une composante K_1 d'une présentation de chirurgie $\mathbf{L}$ est pondérée par un de ses parallèles μ_1 et si une autre composante K_0 de $\mathbf{L}$ est un méridien de K_1 pondéré par son parallèle μ_0 qui borde un disque dans le complémentaire de K_0, alors $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L} \setminus ((K_0;\mu_0),(K_1;\mu_1))$ présentent la même variété.*

Démonstration : En effet, on peut choisir des voisinages tubulaires $T(K_0)$ et $T(K_1)$ pour K_0 et K_1 qui s'intersectent exactement selon un anneau $S^1 \times I$, d'âme $(S^1 \times \{0\} = \mu_0)$, plongé dans leurs bords. Ainsi, la réunion $T(K_0) \cup_{S^1\times I} T(K_1)$ est un tore plein. Comme μ_0 coupe une fois le méridien μ_1 du tore plein $T(\hat{K_1})$ qui remplace $T(K_1)$ après la chirurgie, μ_0 est un parallèle de $\hat{K}_1$. Ainsi, $T(\hat{K_0}) \cup_{S^1\times I} T(\hat{K_1})$ est aussi un tore plein. De plus, le méridien du tore plein $T(K_0) \cup T(K_1)$, remplacé par $T(\hat{K_0}) \cup T(\hat{K_1})$ lors de la chirurgie, est une courbe isotope à μ_0 sur $\partial T(K_0)$, il borde donc dans $T(\hat{K_0})$ et a fortiori dans $T(\hat{K_0}) \cup T(\hat{K_1})$. On a ainsi montré que la chirurgie sur $((K_0;\mu_0),(K_1;\mu_1))$ équivalait à une chirurgie triviale sur un nœud. ⋄

Exercices 1.40 1. Décomposer un mouvement de Fenn et Rourke en une suite de mouvements de Kirby.
2. Montrer que les deux présentations de chirurgie suivantes présentent la même variété.



Première présentation



Deuxième présentation

2 Quelques invariants homologiques des variétés de dimension 3.

2.1 Définition axiomatique de l'homologie. Homologie des sphères.

Rappelons qu'une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée

- d'une classe d'*objets*,
- pour tout couple (X, Y) d'objets, d'un ensemble hom(X,Y) de *morphismes* ou *flèches* de X vers Y,
- pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets, d'une application appelée *composition* de $\hom(X, Y) \times \hom(Y, Z)$ dans hom(X,Z) qui envoie (f, g) sur le morphisme composé gf,

qui possède les propriétés suivantes :

- La composition est *associative* : Pour tout quadruplet (W, X, Y, Z) d'objets, et pour tout triplet de morphismes (f, g, h) de $\hom(W, X) \times \hom(X, Y) \times \hom(Y, Z)$, $(h(gf)) = ((hg)f)$.
- Pour tout objet X, il existe un morphisme de $\hom(X, X)$ appelé *morphisme identité* et noté 1_X tel que pour tout morphisme f de X vers un objet Y, on ait $f1_X = f$ et pour tout morphisme f d'un objet Y vers X, on ait $1_X f = f$. (L'élément 1_X est alors nécessairement unique.)

On considérera les exemples de catégories suivants où la composition est issue de la composition des applications.

Exemples 2.1 1. La catégorie notée Top des espaces topologiques dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
2. La catégorie notée $\mathrm{Top}^{(2)}$ dont les objets sont les couples (B, A) d'espaces topologiques tels que $A \subset B$ et où les flèches d'un objet (B, A) vers un objet (Y, X) sont les applications continues $f : B \longrightarrow Y$ telles que $f(A) \subset X$. On verra les objets de Top comme des objets de $\mathrm{Top}^{(2)}$ en identifiant un espace topologique B au couple $(B, \emptyset)$.
3. Pour un anneau commutatif unitaire Λ, la catégorie des Λ-modules dont les objets sont les Λ-modules et les morphismes les applications Λ-linéaires (appelée catégorie des espaces vectoriels sur Λ lorsque Λ est un corps).
4. Pour un anneau commutatif unitaire Λ, la catégorie $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathbf{Z}}$ des Λ-modules gradués dont les objets sont les familles $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de Λ-modules et les flèches d'un objet $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ vers un objet $(M_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ sont les familles $(f_n : M_n \longrightarrow N_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de morphismes de Λ-modules.

Rappelons aussi qu'un *foncteur* T d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $T(X)$ de $\mathcal{D}$, et, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $T(f)$ de $\mathcal{D}$ de sorte que

- pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $T(1_X) = 1_{T(X)}$, et,
- T est soit *covariant* soit *contravariant*, (covariant en l'absence de précision), c'est-à-dire que pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, et pour tout couple (f, g) de $\hom(X, Y) \times \hom(Y, Z)$,
  si T est covariant, $T(f) \in \hom(T(X), T(Y))$ et $T(gf) = T(g)T(f)$, et,
  si T est contravariant, $T(f) \in \hom(T(Y), T(X))$ et $T(gf) = T(f)T(g)$.

On utilisera le théorème suivant démontré par exemple dans [Spa, 4.8], qui, comme on le verra dans la suite donne une définition axiomatique de l'homologie des variétés triangulées. Le système d'axiomes de ce théorème est équivalent au système apparemment plus faible ((ii) est affaiblie par $A = \emptyset$) d'axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

Théorème 2.2 *Pour tout anneau commutatif unitaire Λ, il existe un foncteur H_* de $Top^{(2)}$ dans $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathbf{Z}}$, qui à un objet (B, A) de $Top^{(2)}$ associe l'objet $(H_n(B, A))_{n\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathbf{Z}}$ et à un morphisme $f : (B, A) \longrightarrow (Y, X)$ associe un morphisme*

$$H_*(f) = (H_n(f) : H_n(B, A) \longrightarrow H_n(Y, X))_{n\in\mathbf{Z}}$$

qui vérifie les axiomes suivants:

(i) Axiome d'homotopie : *Deux applications homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie : Si* $h : B \times [0,1] \longrightarrow Y$ *est une homotopie de* (B,A) *vers* (Y,X)*, c'est-à-dire une application continue telle que* $h(A \times [0,1]) \subset X$*, alors* $H_*(h_0 = h(.,0)) = H_*(h_1 = h(.,1))$.

(ii) Axiome d'exactitude de la suite longue : *Pour tout triplet* (C,B,A) *d'espaces topologiques tels que* $A \subset B \subset C$*, et pour tout entier* q*, il existe un morphisme* $\partial_q(C,B,A) : H_q(C,B) \longrightarrow H_{q-1}(B,A)$ *tel que :*

(a) Pour tout triplet (Z,Y,X) *d'espaces topologiques tels que* $X \subset Y \subset Z$*, pour tout morphisme de* $Top^{(2)}$*,* $f : (C,B) \longrightarrow (Z,Y)$ *tel que* $f(A) \subset X$*, le carré suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} H_q(C,B) & \xrightarrow{H_q(f)} & H_q(Z,Y) \\ {\scriptstyle \partial_q(C,B,A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_q(Z,Y,X)} \\ H_{q-1}(B,A) & \xrightarrow{H_{q-1}(f_{|B})} & H_{q-1}(Y,X) \end{array}$$

$$(\partial_q(Z,Y,X) \circ H_q(f) = H_{q-1}(f_{|B}) \circ \partial_q(C,B,A))$$

(b) La suite longue

$$\ldots \longrightarrow H_q(B,A) \xrightarrow{H_q(i:(B,A)\hookrightarrow(C,A))} H_q(C,A) \xrightarrow{H_q(j:(C,A)\hookrightarrow(C,B))} H_q(C,B) \xrightarrow{\partial_q(C,B,A)} H_{q-1}(B,A) \longrightarrow \ldots$$

où i *et* j *sont les inclusions est une suite exacte.*

(iii) Axiome d'excision : *Soit* (B,A) *un objet de* $Top^{(2)}$*. Soit* U *un ouvert de* B *dont l'adhérence est incluse dans l'intérieur de* A*, alors l'inclusion*

$$e : (B \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (B,A)$$

induit un isomorphisme en homologie. ($H_q(e) : H_q(B \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_q(B,A)$ *est un isomorphisme, pour tout entier* q*.)*

(iv) Axiome de la dimension :

$$H_q(\{*\}) = \begin{cases} \Lambda & \text{si } q = 0 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le module $H_n(B,A)$ est appelé $n^{\text{ième}}$ *module d'homologie de* (B,A) *à coefficients dans* Λ ou module d'homologie en degré n à coefficients dans Λ. La suite $H_*(B,A) = (H_n(B,A))_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée *l'homologie* de (B,A).

Une *équivalence d'homotopie* est une flèche $f : (B,A) \longrightarrow (Y,X)$ telle qu'il existe une flèche $g : (Y,X) \longrightarrow (B,A)$ telle que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes à l'identité de (B,A) et de (Y,X), respectivement. La fonctorialité de l'homologie et l'axiome d'homotopie entraînent qu'une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie. En corollaire, les espaces *contractiles,* c'est à dire ceux qui s'envoient sur l'espace topologique réduit à un point $\{*\}$ par une équivalence d'homotopie, ont même homologie que le point. C'est le cas de $\mathbf{R}^n$ ou de sa boule unité B^n (exercice). Il vient alors de la suite exacte longue que l'homologie du couple $(B^n, \{*\} \subset B^n)$ est nulle en tout degré. La suite exacte longue montre alors encore que les morphismes H_q(inclusion) entre les paires suivantes sont des isomorphismes :

$$H_q(S^n, N = \text{pôle nord}) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, B^n_N = \text{hémisphère nord}) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, S^n \setminus (S = \text{pôle sud}))$$

(où bien sûr les pôles peuvent être remplacés par n'importe quels points tant qu'on a des inclusions). En utilisant l'axiome d'excision, (i) et (ii), on voit que le morphisme H_q(inclusion) entre les paires suivantes est aussi un isomorphisme :

$$H_q(S^n \setminus \{N\}, B^n_N \setminus \{N\}) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, B^n_N)$$

et comme l'inclusion de ($B^n_S =$ hémisphère sud, $S^{n-1} =$ équateur) dans $(S^n\setminus\{N\}, B^n_N\setminus\{N\})$ est une équivalence d'homotopie, on a encore un isomorphisme induit par l'inclusion

$$H_q(B^n_S, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n \setminus \{N\}, B^n_N \setminus \{N\}).$$

$$\partial(B^n, S^{n-1} = \partial B^n, * \in S^{n-1}) : H_q(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_{q-1}(S^{n-1}, *)$$

est aussi un isomorphisme grâce à la suite exacte longue. L'homologie de la paire $(S^n, *)$ formée de la sphère S^n et d'un point $*$ s'obtient ainsi par récurrence sur n à l'aide des isomorphismes déjà cités

$$H_q(S^n, *) \cong H_q(S^n, B^n_N) \cong H_q(B^n_S, S^{n-1}) \overset{\partial}{\cong} H_{q-1}(S^{n-1}, *)$$

où l'homologie de $(S^0, *)$ est la même que celle du point grâce au lemme suivant.

Définition 2.3 La *réunion disjointe* de deux espaces topologiques A et B notée $A \coprod B$ est l'espace topologique réunion des deux ouverts complémentaires A et B. (En tant qu'ensembles, on a $A \coprod B = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.)

Lemme 2.4 *Soit $A \coprod B$ la réunion disjointe de deux espaces topologiques A et B, soit A' un sous-espace topologique de A et soit B' un sous-espace topologique de B. On note $i_A : (A, A') \hookrightarrow (A \coprod B, A' \coprod B')$ et $i_B : (B, B') \hookrightarrow (A \coprod B, A' \coprod B')$ les inclusions. Alors*

$$H_q(i_A) \oplus H_q(i_B) : H_q(A, A') \oplus H_q(B, B') \longrightarrow H_q(A \coprod B, A' \coprod B')$$

est un isomorphisme.

Démonstration : On traite d'abord le cas où A' et B' sont vides. La propriété d'excision implique alors que $H_q(i_A) : H_q(A) \longrightarrow H_q(A \coprod B, B)$ est un isomorphisme pour tout entier q. Ceci entraîne que $H_q(i_A) : H_q(A) \longrightarrow H_q(A \coprod B)$ est injective puisque l'isomorphisme précédent se factorise par cette application. En particulier, comme $H_q(i_A)$ est injective, les morphismes ∂ de la suite longue associée à $(A \coprod B, A, \emptyset)$ sont nuls, et la suite induit pour chaque entier q une suite exacte courte

$$\{0\} \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i_A)} H_q(A \coprod B) \xrightarrow{H_q(\text{Identité}(A \coprod B))} H_q(A \coprod B, A) \longrightarrow \{0\}$$

dont la composée

$$H_q(A \coprod B, A) \xleftarrow{H_q(i_B)} H_q(B) \xrightarrow{H_q(i_B)} H_q(A \coprod B)$$

est une section. (On obtient l'identité en la composant par $H_q(1_{A \coprod B}) : H_q(A \coprod B) \longrightarrow H_q(A \coprod B, A)$.) On conclut alors facilement l'étude de ce cas.

On en déduit le lemme général en écrivant la suite exacte longue associée à $(A \coprod B, A' \coprod B', \emptyset)$ en-dessous de la somme directe des suites exactes longues associées à $(A, A', \emptyset)$ et $(B, B', \emptyset)$. On relie ces deux suites par les morphismes $H_q(i_A) \oplus H_q(i_B)$ qui sont des isomorphismes lorsque le deuxième membre des paires impliquées est vide. On montre alors assez facilement que le morphisme de l'énoncé est un isomorphisme. (C'est le lemme des cinq qui se montre en chassant dans les diagrammes.) $\diamond$

On a ainsi montré :

$$H_q(B^n, B^n \setminus \{\text{point}\}) \cong H_q(S^n, S^n \setminus \{\text{point}\}) \cong H_q(S^n, \{*\}) \cong \begin{cases} \Lambda & \text{si } q = n \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(En particulier, l'homologie permet de montrer qu'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^k$ si k est différent de n.)

Le calcul de $H_q(S^n, \{*\})$ entraîne pour $n > 0$

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \Lambda & \text{si } q = 0 \text{ ou } n \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Pour le cas $n = 1$, on utilise le fait que $H_0(\text{inclusion}) : H_0(\{*\}) \longrightarrow H_0(S^1)$ est injective qui se montre en utilisant $H_0(p : S^1 \longrightarrow \{*\}) \circ H_0(\text{inclusion}) = 1_{H_0(\{*\})}$.)

Le module $H_0(\{*\}) = \Lambda = \Lambda 1_\Lambda$ a pour générateur préféré l'unité de Λ que nous notons $[*] = 1_\Lambda$. Soit X un espace connexe par arcs, et soit $i : \{*\} \longrightarrow X$ une application (ici, réduite à la donnée du point $i(x) \in X$). Toutes les applications de $\{*\}$ dans X étant homotopes, $H_0(i : \{*\} \longrightarrow X)[*]$ est un élément particulier de $H_0(X)$ noté $[i(*)]$, qui engendre $H_0(X) = \Lambda[x \in X]$ dès que X est contractile. De même, on calcule facilement

$$H_0(\mathbf{R} \setminus \{0\}) = \Lambda[-1] \oplus \Lambda[+1]$$

et le morphisme $H_0(i)$ induit par l'inclusion de $H_0(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ vers $H_0(\mathbf{R})$ qui envoie $[-1]$ et $[+1]$ sur le générateur préféré $[-1] = [0] = [1]$ de $H_0(\mathbf{R})$. De l'exactitude de la suite longue associée à $(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \emptyset)$, on déduit alors que $\partial(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \emptyset) : H_1(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow H_0(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ est un isomorphisme sur son image qui est le noyau de $H_0(i)$ soit $\Lambda([+1] - [-1])$. Ainsi,

$$H_1(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}) = \Lambda \partial(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \emptyset)^{-1}([+1] - [-1])$$

et nous voyons que le choix d'un générateur préféré de $H_1(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\})$ dépend du choix de l'ordre des deux demi-droites ouvertes, choix équivalent à celui d'une orientation de la droite $\mathbf{R}$. Ce phénomène est général comme nous le montre le lemme suivant.

Lemme 2.5 *Une application continue h de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, telle que $h(0) = 0$ et $h(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, qui est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur son image induit la multiplication par le signe $\varepsilon = \pm 1$ du jacobien de h en 0 sur $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$.*
($H_n(h)(x) = \varepsilon x, \forall x \in H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$)

Démonstration : On compose d'abord h par un isomorphisme linéaire de $\mathbf{R}^n$ de déterminant positif, pour se ramener au cas où $Dh(0)$ est égal à l'identité si $\varepsilon = 1$, ou au cas où $Dh(0)$ est égal à la symétrie hyperplane orthogonale σ_n qui multiplie $(0, \ldots, 0, 1)$ par -1 si $\varepsilon = -1$. Comme un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de déterminant positif est homotope à l'identité parmi les isomorphismes ($GL^+(\mathbf{R}^n)$ est connexe par arcs), cette composition n'a pas modifié $H_n(h)$. On se ramène ensuite au cas où h est égal à $Dh(0)$ grâce à l'homotopie suivante de $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ dans $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$.

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbf{R}^n \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \times [0,1] \\ & (x,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} Dh(0)(x) & \text{si } t = 0 \\ \frac{h(tx)}{t} & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

Par l'axiome d'homotopie, on a :

$$H_n(h = \Phi_1) = H_n(\Phi_0 = Dh(0))$$

où $Dh(0)$ est soit l'identité soit σ_n. Comme on sait que $H_n(\text{Identité})$ est l'identité, il nous suffit maintenant de montrer que $H_n(\sigma_n)$ est la multiplication par (-1). Commençons par le cas $n = 1$ de la multiplication σ_1 par -1 sur $\mathbf{R}$. Cette multiplication σ_1 échange les composantes connexes de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $H_0(\sigma_1)$ permute donc les générateurs $[1]$ et $[-1]$ de $H_0(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ et $H_1(\sigma_1)$ agit comme la multiplication par (-1) sur $H_1(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}) = \Lambda \partial(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \emptyset)^{-1}([+1] - [-1])$. Nous finissons alors de montrer le lemme par récurrence sur n en transportant $H_n(\sigma_n)$ par les isomorphismes suivants

$$H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \longleftarrow H_n(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(S^{n-1}, B_-^{n-1}) \longleftarrow H_{n-1}(B_+^{n-1}, S^{n-2}) \xrightarrow{p} H_{n-1}(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\})$$

où tous les morphismes non nommés sont induits par les inclusions, $B_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} | x_1 \geq 0\}$, $B_-^{n-1} = \{x \in S^{n-1} | x_1 \leq 0\}$, $S^{n-2} = \{x \in S^{n-1} | x_1 = 0\}$ et $p : B_+^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ consiste à oublier la première coordonnée (et à décaler de (-1) la numérotation des autres) de sorte que la restriction de σ_n à B_+^{n-1} transportée par p est la symétrie hyperplane σ_{n-1}. $\diamond$

Nous définissons le générateur standard $[\mathbf{R}]$ de $H_1(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\})$ comme

$$[\mathbf{R}] = \partial(\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \emptyset)^{-1}([+1] - [-1]).$$

Le lemme précédent implique que le choix d'un générateur de $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \cong \Lambda$ doit être en général associé à une orientation de $\mathbf{R}^n$. L'orientation standard de $\mathbf{R}^n$ est bien sûr celle donnée par sa base standard, et nous définissons par récurrence sur n le générateur standard $[\mathbf{R}^n]$ de $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ comme la préimage du générateur standard $[\mathbf{R}^{n-1}]$ de $H_{n-1}(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ par les isomorphismes, explicités à la fin de la démonstration du lemme précédent, suivants :

$$H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \longleftarrow H_n(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(S^{n-1}, B_-^{n-1}) \longleftarrow H_{n-1}(B_+^{n-1}, S^{n-2}) \xrightarrow{p} H_{n-1}(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}).$$

Le générateur standard $[B^n]$ de $H_n(B^n, B^n \setminus \{0\})$ où B^n est la boule unité orientée de $\mathbf{R}^n$ est alors la préimage de $[\mathbf{R}^n]$ par l'isomorphisme

$$H_n(\text{inclusion}) : H_n(B^n, B^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}),$$

et le générateur standard $[S^n]$ de $H_n(S^n, S^n \setminus \{*\})$, où S^n est une sphère orientée, est l'image de $[B^n]$ par n'importe quel isomorphisme

$$H_n(i) : H_n(B^n, B^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, S^n \setminus \{*\})$$

induit par un plongement i de B^n dans S^n qui envoie 0 sur $*$ et qui respecte l'orientation (ils sont tous homotopes). Nous définissons alors le générateur standard encore noté $[S^n]$ de $H_n(S^n)$ où S^n est une sphère orientée de dimension $n \geq 1$ comme la préimage du précédent $[S^n]$ par l'isomorphisme induit par l'identité de $H_n(S^n)$ dans $H_n(S^n, S^n \setminus \{*\})$. Toutes les variétés orientables seront supposées orientées, et lorsque M^n est une variété orientée nous noterons $-M^n$, la variété munie de l'orientation opposée de sorte que $[S^n] = -[-S^n]$.

Nous avons ainsi fixé les choix des générateurs de sorte que

$$\partial(B^n, S^{n-1}, \emptyset) : H_n(B^n, S^{n-1}) = \Lambda[B^n] \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) = \Lambda[S^{n-1}]$$

envoie $[B^n]$ sur $[S^{n-1}]$ lorsque S^{n-1} est orientée comme bord de B^n avec la convention de la normale extérieure premier vecteur de base.

2.2 Homologie des CW complexes finis.

Définition 2.6 Une structure de *CW complexe relatif de dimension n* sur une paire (X, A) d'espaces topologiques séparés est la donnée d'une filtration $A = (X, A)^{-1} \hookrightarrow (X, A)^0 \hookrightarrow (X, A)^1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (X, A)^n = X$ de X par des sous espaces fermés $(X, A)^i$ appelés *i-squelette* de (X, A) (pour cette structure), et pour tout i, d'un ensemble d'indices Σ_i, et d'une collection d'applications continues

$$g_\alpha : (B^i, \partial B^i = S^{i-1})_\alpha \longrightarrow ((X, A)^i, (X, A)^{i-1}),$$

telles que, en notant g_i l'application $\coprod_{\alpha \in \Sigma_i} g_\alpha$ de $\coprod_{\alpha \in \Sigma_i} (B^i, \partial B^i = S^{i-1})_\alpha$ dans $(X, A)^i$ qui associe $g_\alpha(x)$ à tout x de B_α^i,

$$g_i \left(\coprod_{\alpha \in \Sigma_i} \mathrm{Int}(B_\alpha^i) \right) \subset (X, A)^i \setminus (X, A)^{i-1}$$

et $g_i : \coprod_{\alpha \in \Sigma_i} \mathrm{Int}(B_\alpha^i) \longrightarrow (X, A)^i \setminus (X, A)^{i-1}$ est un homéomorphisme, et, une partie de X est fermée si et seulement si son intersection avec chacun des $(X, A)^i$ est fermée.

Une structure de CW complexe de dimension n sur un espace topologique séparé X est une structure de CW complexe relatif de dimension n sur $(X, \emptyset)$. Les $g_i(\mathrm{Int}(B_\alpha^i))$ sont les *cellules ouvertes* de dimension i de la structure. Un CW complexe est dit *fini* si il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Notons que les cellules sont orientées par l'orientation standard des boules B^i transportée par g_i.

Exemples 2.7 1. S^n a une structure de CW complexe avec une cellule en dimension 0, et une cellule en dimension n. Pour tout $i < n$, le i-squelette de cette structure est réduit à un point.
2. Σ_g a une structure de CW complexe avec une cellule en dimension 0, une cellule en dimension 2, et 2g cellules

de dimension 1, comme on le voit en écrivant Σ_g comme le quotient du polygône à $(4g)$ côtés orientés comme bord du polygône et successivement appelés $x_1, y_1, \overline{x_1}, \overline{y_1}, x_2, y_2, \overline{x_2}, \overline{y_2}, \dots, x_g, y_g, \overline{x_g}, \overline{y_g}$ par les identifications qui recollent une arête a sur l'arête $\overline{a}$ en renversant l'orientation. Ces identifications identifient en particulier tous les sommets du polygône en un seul.
3. Une triangulation fournit une structure de CW complexe dont le i-squelette est la réunion des simplexes de dimension inférieure ou égale à i et les cellules ouvertes de dimension i sont les intérieurs des simplexes de dimension i.
4. À un scindement de Heegaard $M = H_x \cup_{\Sigma_g} H_y$ d'une variété M, on associe une structure de CW complexe sur (M, H_x) avec g cellules de dimension 2 qui sont les disques méridiens D_{y_i}, $i = 1, \dots, g$ de bords y_i, et une cellule ouverte de dimension 3 qui est le complémentaire dans M de la réunion de H_x et des D_{y_i}.

Le but de ce paragraphe est de montrer que le théorème 2.2 détermine l'homologie des CW complexes relatifs finis (X, A) de manière effective.

Rappelons qu'un *complexe de chaînes* est la donnée d'une suite de Λ-modules $C_* = (C_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ et d'une suite d'application linéaires $(d_i : C_i \longrightarrow C_{i-1})_{i \in \mathbf{Z}}$ telle que $d_i \circ d_{i+1}$ est nulle pour tout entier i. *L'homologie* d'un tel complexe est la suite de Λ-modules $(H_q(C_*)_{q \in \mathbf{Z}})$ où

$$H_q(C_*) = \frac{\mathrm{Ker}(d_q)}{\mathrm{Im}(d_{q+1})}.$$

Définition 2.8 Soit f une application continue de S^n dans S^n, $n > 0$. Alors $H_n(f) : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ envoie $[S^n]$ sur $d(f)[S^n]$. L'élément $d(f)$ de Λ ainsi défini qui ne dépend que de la classe d'homotopie de S^n est appelé *degré de f*.

Soit (X, A) un CW complexe relatif comme dans la définition 2.6. Pour tout $i \geq 2$, et pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \Sigma_i \times \Sigma_{i-1}$, on définit un entier $d_{(\alpha,\beta)}$ comme le degré de l'application $g_{(\alpha,\beta)}$ suivante. Soit p_β une application de $(X, A)^{i-1}$ dans S^{i-1} qui envoie $\left((X, A)^{i-1} \setminus g_\beta(\mathrm{Int}(B^{i-1}_\beta))\right)$ en un point $*$ de S^{i-1} et qui est un homéomorphisme préservant l'orientation de $g_\beta(\mathrm{Int}(B^{i-1}_\beta))$ sur $S^{i-1} \setminus \{*\}$. L'application $g_{(\alpha,\beta)}$ est la composée

$$g_{(\alpha,\beta)} : (S^{i-1}_\alpha = \partial B^i_\alpha) \xrightarrow{g_\alpha} (X, A)^{i-1} \xrightarrow{p_\beta} S^{i-1}.$$

Soit, pour $i \in \mathbf{Z}$, C_i le Λ-module librement engendré par les cellules de dimension i **orientées**.

$$C_i = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_i} \Lambda[g_\alpha(B^i_\alpha)]$$

et soit $d_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$ le morphisme suivant

$$d_i([g_\alpha(B^i_\alpha)]) = \sum_{\beta \in \Sigma_{i-1}} d_{(\alpha,\beta)}[g_\beta(B^{i-1}_\beta)], \qquad \text{si } i \geq 2,$$

et $d_1([B^1_\alpha] = [-1, 1]_\alpha) = [g_1(1)] - [g_1(-1)]$.

Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 2.9 *Sous les hypothèses ci-dessus, (C_i, d_i) est un complexe de chaînes dont l'homologie est égale à l'homologie de (X, A).*

Commençons par exprimer les C_i et les d_i de manière plus intrinsèque. Nous utiliserons le signe égal pour signifier *canoniquement isomorphe,* par exemple lorsque les isomorphismes sont induits par des inclusions.

Lemme 2.10 *Pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$, $C_i = H_i((X, A)^i, (X, A)^{i-1})$ et, pour tout entier $q \in \mathbf{Z}$ différent de i, $H_q((X, A)^i, (X, A)^{i-1}) = \{0\}$.*

Démonstration : Par invariance par homotopie

$$H_q((X,A)^i,(X,A)^{i-1}) = H_q\left((X,A)^i,(X,A)^i \setminus g_i\left(\coprod_{\alpha\in\Sigma_i}(\{0\}_\alpha \subset B^i_\alpha)\right)\right).$$

Par excision, ce module vaut

$$H_q\left(g_i\left(\coprod_{\alpha\in\Sigma_i}\frac{1}{2}B^i_\alpha\right), g_i\left(\coprod_{\alpha\in\Sigma_i}(\frac{1}{2}B^i_\alpha \setminus \{0\}_\alpha)\right)\right) = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_i} H_q(g_i)\left(H_q\left(\frac{1}{2}B^i_\alpha, \frac{1}{2}B^i_\alpha \setminus \{0\}_\alpha\right)\right)$$

où

$$H_q\left(\frac{1}{2}B^i_\alpha, \frac{1}{2}B^i_\alpha \setminus \{0\}_\alpha\right) = \begin{cases} \Lambda[B_\alpha] & \text{si } q=n \\ \{0\} & \text{sinon,}\end{cases}$$

où B_α a l'orientation induite par g_i. Alors,

$$H_i((X,A)^i,(X,A)^{i-1}) = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_i}\Lambda[g_\alpha(B^i_\alpha)] = C_i$$

pour $i \geq 0$. ◇

Notons que les facteurs directs des C_i peuvent être vus de plusieurs manières équivalentes comme :

$$H_i(g_\alpha)H_i\left(\frac{1}{2}B^i_\alpha, \frac{1}{2}B^i_\alpha \setminus \{0\}_\alpha\right) = H_i(g_\alpha)H_i\left(B^i_\alpha, S^{i-1}_\alpha\right) = H_i((X,A)^i,(X,A)^i \setminus \{0\}_\alpha)$$

En particulier, l'inclusion d'un facteur dans C_i est canoniquement induite par l'inclusion en utilisant la deuxième forme, tandis que la projection de C_i sur un facteur est aussi induite par l'inclusion en utilisant la troisième des formes données ci-dessus.

Lemme 2.11

$$d_i = \partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},(X,A)^{i-2}) : C_i \longrightarrow C_{i-1}$$

Démonstration : Posons $\tilde{d}_i = \partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},(X,A)^{i-2})$. On vérifie que $\tilde{d}_1([B^1_\alpha] = [-1,1]_\alpha) = [g_1(1)] - [g_1(-1)]$ (Exercice). Nous montrons maintenant que $\tilde{d}_i = d_i$, pour $i \geq 2$, en calculant

$$\tilde{d}_i([g_\alpha(B^i_\alpha)]) = \sum_{\beta\in\Sigma_{i-1}}\tilde{d}_{(\alpha,\beta)}[g_\beta(B^{i-1}_\beta)]$$

et en montrant que $\tilde{d}_{(\alpha,\beta)} = d_{(\alpha,\beta)}$. D'après les remarques précédentes sur la canonicité de la décomposition des C_i, en définissant $f_{(\alpha,\beta)}$ comme la composée

$$H_i\left(B^i_\alpha, S^{i-1}_\alpha\right) \xrightarrow{H_i(g_i)} C_i \xrightarrow{\tilde{d}_i} C_{i-1} \xrightarrow{H_{i-1}(\text{inclusion})} H_{i-1}((X,A)^{i-1},(X,A)^{i-1}\setminus\{0\}_\beta \xrightarrow{H_{i-1}(p_\beta)} H_{i-1}(S^{i-1},S^{i-1}\setminus\{*\}),$$

on a

$$f_{(\alpha,\beta)}([g_\alpha(B^i)]) = \tilde{d}_{(\alpha,\beta)}[S^{i-1}]$$

Comme $f_{(\alpha,\beta)}([g_\alpha(B^i)]) = H_{i-1}(p_\beta \circ g_\alpha)[S^{i-1}]$, on conclut que $\tilde{d}_{(\alpha,\beta)} = d_{(\alpha,\beta)}$. ◇

La proposition 2.9 est maintenant conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.12 *L'image de d_{i+1} est incluse dans le noyau de d_i et*

$$H_i(X,A) = \frac{Ker(d_i)}{Im(d_{i+1})}$$

Démonstration : Notons d'abord que d_i est la composition

$$d_i : C_i \xrightarrow{\partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)} H_{i-1}((X,A)^{i-1},A) \xrightarrow{H_{i-1}\left(j_{i-1} : ((X,A)^{i-1},A) \hookrightarrow ((X,A)^{i-1},(X,A)^{i-2})\right)} C_{i-1}.$$

0. On voit que $d_i \circ d_{i+1} = 0$ en décomposant les deux morphismes d_i et d_{i+1} comme ci-dessus ce qui les fait passer par

$$H_i((X,A)^i,A) \xrightarrow{H_i(j_i)} C_i \xrightarrow{\partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)} H_{i-1}((X,A)^{i-1},A)$$

qui est un morceau de la suite exacte longue de $((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)$.
1. Montrons par récurrence sur i que $H_k((X,A)^i,A) = 0$ si $k > i$. Si $i = -1$, c'est vrai. Ensuite, on utilise la suite exacte

$$H_k((X,A)^{i-1},A) \longrightarrow H_k((X,A)^i,A) \longrightarrow H_k((X,A)^i,(X,A)^{i-1}) = 0$$

qui montre que le module $H_k((X,A)^{i-1},A)$, nul par hypothèse de récurrence, se surjecte dans $H_k((X,A)^i,A)$ qui est donc nul.
2. Montrons que $\mathrm{Ker}(d_i) = H_i(j_i)(H_i((X,A)^i,A))$, où $H_i(j_i)$ est injective.

La suite exacte

$$0 = H_i((X,A)^{i-1},A) \longrightarrow H_i((X,A)^i,A) \xrightarrow{H_i(j_i)} H_i((X,A)^i,(X,A)^{i-1}) \xrightarrow{\partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)} H_{i-1}((X,A)^{i-1},A)$$

montre que $H_i(j_i)$ est injective et que l'image $H_i(j_i)(H_i((X,A)^i,A))$ est égale au noyau de $\partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)$. Comme $d_i = H_{i-1}(j_{i-1}) \circ \partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)$ où $H_{i-1}(j_{i-1})$ est injective, le noyau de d_i est bien égal à celui de $\partial((X,A)^i,(X,A)^{i-1},A)$.
3. On montre encore avec la suite exacte longue que $H_k((X,A)^i,A) = H_k((X,A)^{i+1},A)$ si $i > k$.
4. On en déduit que $H_i(X,A) = H_i((X,A)^{i+1},A)$.
5. On calcule $H_i((X,A)^{i+1},A)$ en utilisant encore la suite longue et le carré commutatif suivants où $H_i(j_{i-1})$ est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{i+1} & \xrightarrow{\partial((X,A)^{i+1},(X,A)^i,A)} & H_i((X,A)^i,A) & \longrightarrow & H_i((X,A)^{i+1},A) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle d_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle H_i(j_i)}\downarrow & & & & \\
C_i & = & H_i((X,A)^i,(X,A)^{i-1}) & & & &
\end{array}$$

Ceci finit de montrer que les isomorphismes induits par les inclusions identifient $H_i(X,A)$ à $\frac{\mathrm{Ker}(d_i)}{\mathrm{Im}(d_{i+1})}$.

$\diamond$

Sachant calculer d_1, nous pouvons calculer notre premier exemple explicite.

Exemple 2.13 1. On définit le *bouquet* d'un nombre fini d'espaces topologiques munis chacun d'un point base comme le quotient de leur réunion disjointe par l'identification de tous leurs points base en un point $*$. Un bouquet de g cercles a une structure de CW complexe avec une seule cellule de dimension 0 et g cellules $(I_i = [-1,1]_i)$, $i = 1,\ldots,g$, de dimension 1. Le calcul de $d_1([I_i = [-1,1]_i]) = [g_1(1)] - [g_1(-1)]$ donne 0 pour toutes les cellules et l'homologie du bouquet de g cercles est donc l'homologie de

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_1 = \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda[I_i] \xrightarrow{d_1 = 0} C_0 = \Lambda[*] \longrightarrow 0.$$

Comme un corps à g anses H_g est homotopiquement équivalent à un bouquet de g cercles, on en déduit :

$$H_q(H_g) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } q \neq 0,1 \\ \Lambda & \text{si } q = 0 \\ \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda[I_i] & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En général, il suffit de savoir calculer les d_i pour savoir calculer l'homologie des CW complexes finis. Pour cela, il suffit de savoir évaluer le degré d'une application de S^i dans S^i.

Définition 2.14 Soit f une application continue d'une variété différentiable orientée M de dimension n dans une variété différentiable orientée N de dimension n, un point y de N est dit *régulier* (par rapport à f), si la préimage de y est finie et si f est différentiable et de différentielle surjective dans un voisinage de la préimage de y. Le *degré différentiel* de f en un point régulier y est la somme des signes (± 1) des jacobiens de f en les points de $f^{-1}(y)$.

$$\deg(f,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} \frac{\text{dét}(Df(x))}{|\text{dét}(Df(x))|}$$

Exemple 2.15 Soit $f : S^1 \longrightarrow S^1$ l'application qui envoie z sur $f(z) = z^n$, le degré différentiel de cette application est n en tout point de S^1.

Dans le cas d'une application g de la sphère dans elle-même, le lemme suivant nous assure que le degré de g est égal à son degré différentiel calculé en n'importe quel point régulier. Pratiquement, on calculera le degré d'une telle application g en homotopant d'abord g sur une application qui a un point régulier puis en calculant le degré différentiel de ce point.

Lemme 2.16 *Soit g une application de S^i dans S^i, $i > 0$, qui admet au moins un point régulier x. Alors le degré de g est égal au degré différentiel de g calculé en x.*

Démonstration : Notons d'abord que $g^{-1}(x)$ est un sous-ensemble fini de S^i (compact et discret). On veut calculer

$$H_i(g) : H_i(S^i) \longrightarrow H_i(S^i) \xrightarrow{\cong} H_i(S^i, S^i \setminus \{x\})$$

Cette application est la composée

$$H_i(S^i) \longrightarrow H_i(S^i, S^i\setminus g^{-1}(x)) \xleftarrow{\cong} H_i\left(\coprod_{y\in g^{-1}(x)} B_y, \coprod_{y\in g^{-1}(x)} (B_y\setminus\{y\})\right) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(S^i, S^i\setminus\{x\})$$

où les B_y sont des boules disjointes de S^i centrées en les points y de $g^{-1}(x)$.

$$H_i\left(\coprod_{y\in g^{-1}(x)} B_y, \coprod_{y\in g^{-1}(x)} (B_y\setminus\{y\})\right) = \bigoplus_{y\in g^{-1}(x)} H_i(B_y, B_y\setminus\{y\})$$

La projection sur un facteur y de l'application

$$H_i(S^i) \longrightarrow H_i(S^i, S^i\setminus g^{-1}(x)) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_{y\in g^{-1}(x)} H_i(B_y, B_y\setminus\{y\})$$

est la composée

$$H_i(S^i) \longrightarrow H_i(S^i, S^i\setminus\{y\}) \xleftarrow{\cong} H_i(B_y, B_y\setminus\{y\})$$

Ainsi, cette application envoie $[S^i]$ sur $\sum_{y\in g^{-1}(x)}[B_y]$. Or, d'après le lemme 2.5, $H_i(g_{|B_y}) : H_i(B_y, B_y\setminus\{y\}) \longrightarrow H_i(S^i, S^i\setminus\{x\})$ envoie $[B_y]$ sur $\frac{\text{dét}(Dg(y))}{|\text{dét}(Dg(y))|}[S^i]$. $\diamond$

Exemples 2.17 1. Appelons P la cellule de dimension 2 de la structure de CW complexe de Σ_g décrite dans l'exemple 2.7(2). Cette structure induit le complexe de chaînes

$$0 \longrightarrow C_2 = \Lambda[P] \longrightarrow C_1 = \bigoplus_{i=1}^{g} (\Lambda[x_i] \oplus \Lambda[y_i]) \xrightarrow{d_1 = 0} C_0 = \Lambda[*] \longrightarrow 0.$$

Comme le bord orienté de P recouvre chaque cellule de dimension 1 une fois dans le sens de son orientation et une fois dans l'autre sens, le degré d'un point intérieur à une telle cellule est nul. L'application d_2 est donc nulle, l'application d_1 est aussi nulle et on obtient ainsi :

$$H_q(\Sigma_g) = \begin{cases} \Lambda[P] & \text{si } q = 2 \\ \bigoplus_{i=1}^{g} (\Lambda[x_i] \oplus \Lambda[y_i]) & \text{si } q = 1 \\ \Lambda[*] & \text{si } q = 0 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Nous allons maintenant calculer l'homologie du CW complexe relatif $(M = H_x \cup H_y, H_x)$ décrit dans le quatrième exemple de 2.7. Là encore la sphère bord de la cellule B de dimension 3 recouvre chaque cellule de dimension 2 deux fois, une fois en préservant l'orientation et une fois en la renversant, l'application $d_3 : C_3 = \Lambda[B] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda[D_{y_i}]$ entre les seuls modules non nuls du complexe de chaînes associé à la structure de CW complexe est donc encore nulle, et on obtient ainsi :

$$H_q(M, H_x) = \begin{cases} \Lambda[B] & \text{si } q = 3 \\ \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda[D_{y_i}] & \text{si } q = 2 \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Dans le cas d'une triangulation finie d'un espace topologique, le module C_i est le Λ-module librement engendré par les simplexes orientés de dimension i de la triangulation. Le morphisme

$$d_i : C_i = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_i} \Lambda[\Delta^i_\alpha] \longrightarrow \bigoplus_{\beta \in \Sigma_{i-1}} \Lambda[\Delta^{i-1}_\beta]$$

est tel que la coordonnée $d_i^{\beta\alpha}$ de $d_i([\Delta^i_\alpha]) = \sum_{\beta \in \Sigma_{i-1}} d_i^{\beta\alpha} [\Delta^{i-1}_\beta]$ est

- 0 si Δ^{i-1}_β n'est pas une face de Δ^i_α,
- 1 si Δ^{i-1}_β est une face de Δ^i_α et a l'orientation bord de Δ^i_α,
- (-1) si Δ^{i-1}_β est une face de Δ^i_α et a l'orientation opposée à l'orientation bord de Δ^i_α.

Définition 2.18 Soit X un espace topologique. Lorsque $\Lambda = \mathbf{R}$, $H_i(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont la dimension, notée $\beta_i(X)$, est appelée $i^{\text{ème}}$ *nombre de Betti* de X. Lorsque la somme $\sum_{i \in \mathbf{N}} |\beta_i(X)|$ est finie, on définit la *caractéristique d'Euler*, notée $\chi(X)$, comme la somme alternée

$$\chi(X) = \sum_{i \in \mathbf{N}} (-1)^i \beta_i(X).$$

Exercice 2.19 Montrer que dans le cas où X est un espace topologique muni d'une triangulation finie avec $(\sharp\Sigma_i)$ simplexes de dimension i, $\chi(X) = \sum_{i \in \mathbf{N}} (-1)^i \sharp\Sigma_i$.

Définition 2.20 Une triangulation linéaire de $\mathbf{R}^n$ est une triangulation localement finie pour laquelle les inclusions des simplexes dans $\mathbf{R}^n$ sont des applications affines. Une triangulation d'une variété M de dimension n différentiable est dite *bonne* si tout point de M a un voisinage V identifié par un difféomorphisme h à un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ muni d'une triangulation linéaire, tel que si Δ est un simplexe de dimension i de M, il existe un simplexe Δ' de la triangulation linéaire de $\mathbf{R}^n$ tel que $h(V \cap \Delta) = U \cap \Delta'$. Une variété munie d'une telle triangulation sera dite *bien triangulée.*

Proposition 2.21 *Soit M une variété de dimension n différentiable, compacte, connexe, bien triangulée. Alors*

$$H_n(M) = \begin{cases} \Lambda[M] & \textit{si } M \textit{ est orientée sans bord} \\ (\textit{2-torsion de } \Lambda)[M] & \textit{si } M \textit{ est sans bord et non orientable} \\ \{0\} & \textit{si le bord de } M \textit{ est non vide} \end{cases}$$

Si de plus M est orientée, pour tout point x intérieur à M, les applications suivantes induites par les inclusions sont des isomorphismes

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{point\}) \longleftarrow H_n(B^n, B^n \setminus \{point\}\ ).$$

L'image du générateur $[B^n]$ par le deuxième isomorphisme est notée $[M]$, et la préimage de $([M] \in H_n(M, M \setminus \{point\}))$ par le premier isomorphisme est encore notée $[M]$.

Démonstration : Un élément de $H_n(M)$ est une combinaison

$$c = \sum_{\Delta \text{ simplexe de dimension n}} f(\Delta)[\Delta]$$

où $f(\Delta) \in \Lambda$ et $d_n(c) = 0$. Considérons un simplexe δ de dimension $(n-1)$.

Si δ est dans le bord de M, δ est la face d'un unique simplexe Δ qui vérifie alors nécessairement $f(\Delta) = 0$, pour que la projection de $d_n(c)$ sur le facteur de $[\delta]$ soit nulle.

Sinon, δ est la face de deux simplexes Δ et Δ' qui ont soit des orientations cohérentes (induites par une orientation de la réunion des deux) le long de δ, soit des orientations incohérentes. Dans le premier cas, pour que la projection de $d_n(c)$ sur le facteur de $[\delta]$ soit nulle, f doit vérifier

$$f(\Delta) = f(\Delta'),$$

dans le deuxième cas, f doit vérifier

$$f(\Delta) = -f(\Delta').$$

Réciproquement, si f vérifie ces conditions, $d_n(c) = 0$. Deux points de M hors du $(n-1)$-squelette de M sont toujours reliés par un chemin qui ne rencontre le $(n-1)$-squelette de M qu'un nombre fini de fois et toujours dans l'intérieur des simplexes de dimension $(n-1)$. Le long d'un tel chemin, tous les simplexes ont le même coefficient au signe près. Ceci montre que si M a du bord, seule la combinaison nulle est dans le noyau de d_n qui est donc réduit à $\{0\}$. Si M est orientée, on munit tous les simplexes de l'orientation de M, et les éléments du noyau sont en bijection avec les applications constantes à valeurs dans Λ. Si M n'est pas orientable, il existe un lacet γ de M tel que:

- γ ne rencontre le $(n-1)$-squelette de M qu'un nombre fini de fois et toujours dans l'intérieur des simplexes de dimension $(n-1)$,

- γ traverse sucessivement k simplexes distincts de dimension n, $\Delta_{k+1} = \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$, où $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \delta_i$ est un simplexe de dimension $n-1$,

- si l'on oriente les Δ_i pour que leurs orientations soient cohérentes le long des δ_i, $i \neq k$, alors, les orientations de Δ_k et de $\Delta_{k+1} = \Delta_1$ ne sont pas cohérentes le long de δ_k.

(Sinon, un tel procédé non contradictoire définirait une orientation cohérente sur un système de cartes constitué de voisinages des simplexes de dimension n et donc une orientation sur M.) Dans ce cas, $f(\Delta_1)$ est nécessairement un élément de 2-torsion de Λ, et on voit que le noyau de d_n est en bijection avec les applications constantes à valeurs dans la 2-torsion de Λ.
Le calcul de $H_n(M, \partial M)$ s'effectue de la même manière puisque dans ce cas les simplexes de dimension $(n-1)$ du bord ne sont pas des cellules de la paire. Si M est une variété compacte orientée de dimension n, on note $[M]$ son générateur correspondant à l'application constante qui envoie tous les simplexes munis de la bonne orientation sur l'unité de Λ. En particulier, les isomorphismes

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{\text{point}\}\ ) \longleftarrow H_n(B^n, B^n \setminus \{\text{point}\}\ )$$

respectent les générateurs préférés. $\diamond$

Définition 2.22 Soit M^n une variété compacte, connexe, orientée, bien triangulée, de dimension n, sans bord, envoyée dans un espace topologique X par une application continue i. On définit la classe d'homologie $[i(M^n)]$ de $i(M^n)$ dans X, comme $[i(M^n)] = H_n(i)[M^n]$. En particulier, une sous-variété compacte, connexe, orientée, bien triangulée, de dimension n, d'une variété définit une classe d'homologie de dimension n. De même, si M^n est une variété compacte, connexe, orientée, bien triangulée, de dimension n, envoyée dans un espace topologique X par une application continue i de sorte que $i(\partial M^n)$ soit envoyée dans une partie A de X, on note $[i(M^n)]$ la classe $H_n(i)[M^n] \in H_n(X, A)$. Ceci justifie les notations déjà utilisées à maintes reprises.

Proposition 2.23 *Soit X un CW complexe fini connexe par arcs non vide. Soit $x \in X$. Alors $H_0(X) = \Lambda[x]$.*

Démonstration : Soit $\{x_i; i \in \Sigma_0\}$ l'ensemble des cellules de dimension 0 de X. Comme X est connexe, son 1-squelette est un graphe connexe. (Le bord de toute cellule de dimension supérieure est connexe.) On sait déjà que les classes de tous les éléments de X sont identiques, et on suppose donc que x est une 0-cellule.

$$H_0(X) = \frac{\bigoplus_{i\in\Sigma_0} \Lambda[x_i]}{\mathrm{Image}(d_1)}$$

Pour toute 0-cellule x_i, il existe un chemin injectif de x à x_i. Attribuons alors à chaque arête parcourue par ce chemin, le coefficient 1 si elle est parcourue selon son orientation et -1 sinon. L'image par d_1 de la combinaison d'arêtes ainsi obtenue est $([x_i] - [x])$. Ceci remontre que $[x_i] = [x]$ dans le quotient et que l'application de $\Lambda[x]$ dans $H_0(X)$ qui envoie $[x]$ sur $[x]$ est surjective. Soit

$$\begin{array}{rlcl} \varepsilon : & \bigoplus_{i\in\Sigma_0} \Lambda[x_i] & \longrightarrow & \Lambda[x] \\ & [x_i] & \mapsto & [x] \end{array}$$

Il est clair que ε passe bien au quotient pour définir l'inverse de la surjection ci-dessus de $H_0(X)$ dans $\Lambda[x]$. ⋄

Nous allons maintenant donner quelques règles de calcul des applications entre modules d'homologie.

Rappelons que si A est une partie d'un espace topologique X, $\frac{X}{A}$ désigne le quotient de X par A qui est l'espace, muni de la topologie quotient, obtenu en identifiant tous les points de A en un point. Par exemple, le quotient

$$\frac{(X, A)^i}{(X, A)^i \setminus g_\alpha(\mathrm{Int}(B^i_\alpha))}$$

du i squelette d'un CW complexe par le complémentaire de l'intérieur $g_\alpha(\mathrm{Int}(B^i_\alpha))$ d'une cellule est une sphère de dimension i qui hérite de l'orientation de la cellule.

Proposition 2.24 *Soit (B, A) un sous CW complexe relatif d'un CW complexe relatif fini (C, A). Soit B^i_α une cellule de dimension i du CW complexe relatif (C, B), attachée par*

$$g_\alpha : (B^i, S^{i-1}) \longrightarrow ((C, B)^i, (C, B)^{i-1}).$$

Soit $\{B^{i-1}_\beta; \beta \in \Sigma\}$ l'ensemble des cellules de dimension $(i-1)$ de (B, A) attachées par

$$h_\beta : (B^{i-1}, S^{i-2}) \longrightarrow ((B, A)^{i-1}, (B, A)^{i-2}).$$

Soit p_β l'application quotient

$$p_\beta : (B, A)^{i-1} \longrightarrow \frac{(B, A)^{i-1}}{(B, A)^{i-1} \setminus h_\beta(Int(B^{i-1}_\beta))} \xrightarrow{\cong} S^{i-1}.$$

Alors

$$\partial_i(C, B, A)([g_\alpha(B^i_\alpha)]) = \sum_{\beta\in\Sigma} deg(p_\beta \circ g_{\alpha|S^{i-1}})[h_\beta(B^{i-1}_\beta)]$$

Démonstration : Exercice ⋄

Exemple 2.25 Soit M une variété compacte, connexe, orientée, bien triangulée de dimension $n+1$ dont le bord ∂M est réunion disjointe de ses composantes connexes $\partial_1 M$, $\partial_2 M$, ..., $\partial_k M$ orientées avec la convention habituelle. Alors,

$$\partial_{n+1}(M, \partial M, \emptyset)([M] \in H_{n+1}(M, \partial M)) = \sum_{i=1}^{k} [\partial_i M] \in H_n(\partial M)$$

et $\sum_{i=1}^{k} [\partial_i M]$ est nul dans $H_n(M)$. En particulier, si une telle variété M est envoyée par une application continue dans un espace topologique X, alors

$$\sum_{i=1}^{k} [i(\partial_i M)] = 0 \in H_n(X).$$

Par conséquent, si X est une variété, le bord d'une sous-variété orientée de X est homologiquement trivial (nul dans $H*(X)$). Par exemple, une courbe séparante sur une surface orientable sans bord est homologiquement triviale (nulle dans le H_1 de la surface).

Proposition 2.26 *Soit f une application continue d'un CW complexe relatif fini (B, A) vers un sous CW complexe relatif fini (B', A'). Supposons f* cellulaire, *c'est-à-dire telle que $f((B, A)^i \subset (B', A')^i)$ pour tout i.*

Soit B^i_α une cellule de dimension i du CW complexe relatif (B, A), attachée par

$$g_\alpha : (B^i, S^{i-1}) \longrightarrow ((B, A)^i, (B, A)^{i-1}).$$

Soit $\{B^i_\beta; \beta \in \Sigma\}$ l'ensemble des cellules de dimension i de (B', A') attachées par

$$h_\beta : (B^i, S^{i-1}) \longrightarrow ((B', A')^i, (B', A')^{i-1}).$$

Soit p_β l'application quotient

$$p_\beta : (B', A')^i \longrightarrow \frac{(B', A')^i}{((B', A')^i \setminus h_\beta(Int(B^i_\beta))} \xrightarrow{\cong} S^i.$$

$p_\beta \circ g_\alpha$ définit par passage au quotient une application continue $p_{(\alpha,\beta)}$ sur S^i, vue comme $\frac{B^i}{\partial B^i}$. Alors

$$H_i(f)([g_\alpha(B^i_\alpha)]) = \sum_{\beta \in \Sigma} deg(p_{(\alpha,\beta)})[h_\beta(B^i_\beta)]$$

Démonstration : Exercice ◇

Exemple 2.27 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} f_{(p,q)}: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & z & \mapsto & (z^p, z^q) \end{array}$$

$f_{(p,q)}$ est homotope à une application de S^1 dans le 1-squelette de $S^1 \times S^1$ décrit dans l'exemple 2.7(2). L'image de cette application parcourt p fois la cellule $x_1 = \mathrm{Im}(f_{(1,0)})$ dans le bon sens et q fois la cellule $y_1 = \mathrm{Im}(f_{(0,1)})$ dans le bon sens. Ainsi

$$H_1(f_{(p,q)})([S^1]) = p[x_1] + q[y_1]$$

En utilisant cet exemple, on peut calculer l'application induite sur le H_1 par un difféomorphisme h de $S^1 \times S^1$ qui envoie (z_1, z_2) sur $(z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$ où a, b, c et d sont quatre entiers tels que $(ad - bc) = 1$:

$$H_1(h)([x_1]) = a[x_1] + c[y_1] \quad \text{et} \quad H_1(h)([y_1]) = b[x_1] + d[y_1].$$

Proposition 2.28 *Soit M et N deux variétés différentiables compactes, sans bord, connexes, orientées, bien triangulées, de même dimension n, et soit f une application différentiable de M dans N, alors pour tout point régulier y de f*

$$H_n(f) : H_n(M) \longrightarrow H_n(N)$$

envoie $[M]$ sur $deg(f; y)[N]$ où $deg(f; y)$ est le degré différentiel de f en y, qui est donc indépendant de y, et qui est appelé degré de f. *Le degré de f est un entier qui ne dépend que de la classe d'homotopie de f.*

Démonstration : Exercice $\diamond$

Exemple 2.29 Soit un plongement

$$L : S^1_1 \coprod S^1_2 \hookrightarrow \mathbf{R}^3$$

de la réunion disjointe de deux cercles $S^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ dans $\mathbf{R}^3$. À un élément (z_1, z_2) of $S^1_1 \times S^1_2$ on associe la direction orientée

$$\Psi((z_1, z_2)) = \frac{1}{||\overrightarrow{L(z_1)L(z_2)}||} \overrightarrow{L(z_1)L(z_2)} \in S^2$$

du vecteur $\overrightarrow{L(z_1)L(z_2)}$. On a ainsi une application différentiable

$$\Psi : S^1_1 \times S^1_2 \longrightarrow S^2$$

entre deux variétés compactes orientées. Le degré $\deg(\Psi)$ calculé comme le degré différentiel d'un vecteur du noyau de la projection d'une projection régulière de l'entrelacs L est

$$\deg(\Psi) = \sharp \underset{1}{\times}{}_{2} - \sharp \underset{2}{\times}{}_{1} = \sharp \underset{2}{\times}{}_{1} - \sharp \underset{1}{\times}{}_{2}$$

où la première expression vient du calcul de la préimage d'un vecteur fuyant l'observateur et la deuxième du calcul de la préimage d'un vecteur venant vers l'observateur.

Une isotopie de l'entrelacs induit une homotopie de l'application Ψ et laisse donc invariante le nombre $deg(\Psi)$ qui est un invariant isotopique de l'entrelacs orienté à deux composantes. Ce nombre est appelé *nombre d'enlacement* de $L(S^1_1)$ et de $L(S^1_2)$, il est symétrique et change de signe lorsque l'on renverse l'orientation d'une composante.

Un croisement $\times$ d'une projection régulière est appelé *croisement positif* tandis qu'un croisement $\times$ d'une projection régulière est appelé *croisement négatif.*

(Pour amener le brin orienté du dessus sur le brin orienté du dessous en faisant coïncider les orientations, on le fait tourner dans le sens trigonométrique pour un croisement positif.)

On peut aussi calculer le nombre d'enlacement de deux composantes d'un entrelacs donné par une de ses projections régulières comme la moyenne des deux expressions précédentes qui est la demi-somme des signes des croisements qui impliquent les deux composantes.

On voit alors que le nombre d'enlacement d'un nœud et de son parallèle sur une projection régulière (orientés parallèlement) est la somme des signes des croisements du nœud. En particulier, il varie de ± 1 lorsque l'on twiste la bande d'un tour. Ce nombre définit donc une bijection entre les trivialisations à isotopie près du voisinage tubulaire d'un nœud de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{Z}$. Une chirurgie entière sur un nœud de $\mathbf{R}^3$ sera souvent repérée par la donnée du nœud (non parallélisé) et du nombre d'enlacement du noeud et de son parallèle, cette donnée étant équivalente à la donnée de la classe d'isotopie de la bande entre le parallèle et le nœud.

2.3 Homologie des 3-variétés.

Exemple 2.30 On peut maintenant voir la forme particulière de l'homologie d'une 3-variété compacte, connexe, sans bord, orientée M donnée par un scindement de Heegaard de genre g, $M = H_x \cup H_y$. On sait déjà que $H_0(M) = \Lambda[x \in M]$ et que $H_3(M) = \Lambda[M]$. Utilisons maintenant la suite exacte longue associée à $(M, H_x, \emptyset)$

$$H_2(H_x) = \{0\} \longrightarrow H_2(M) \longrightarrow H_2(M, H_x) = \Lambda^g \xrightarrow{\partial_2} H_1(H_x) = \Lambda^g \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow H_1(M, H_x) = \{0\}$$

$H_1(M;\Lambda)$ et $H_2(M;\Lambda)$ sont respectivement le conoyau et le noyau de l'application ∂_2 qui est donnée par une matrice carrée d'ordre g à coefficients entiers. Ces coefficients sont les degrés explicités dans la proposition 2.24. En particulier, si Λ est un corps, $H_1(M) = H_1(M;\Lambda)$ et $H_2(M)$ sont des espaces vectoriels de même dimension. En général, l'homologie de M à coefficients dans tout anneau unitaire commutatif Λ est déterminée par l'homologie de M à coefficients dans $\mathbf{Z}$. $H_2(M;\mathbf{Z})$ est un module libre qui a même rang que $H_1(M;\mathbf{Z})$ qui peut, lui, avoir de la torsion. Ainsi, l'homologie d'une 3-variété compacte, connexe, sans bord, orientée M est déterminée par $H_1(M;\mathbf{Z})$. On dit que M est une *sphère d'homologie entière de dimension 3* ou une $\mathbf{Z}$-*sphère* lorsque M est une

3-variété compacte, orientée qui a la même homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}$ que S^3, c'est-à-dire, si M est connexe et sans bord, lorsque $H_1(M;\mathbf{Z}) = \{0\}$. On dit que M est une *sphère d'homologie rationnelle de dimension 3* ou une $\mathbf{Q}$-*sphère* lorsque M est une 3-variété compacte, orientée qui a la même homologie à coefficients dans $\mathbf{Q}$ que S^3, c'est-à-dire, si M est connexe et sans bord, lorsque $H_1(M;\mathbf{Q}) = \{0\}$ ou lorsque $H_1(M;\mathbf{Z})$ est de torsion.

Proposition 2.31 (Suite exacte de Mayer-Vietoris) *Soit A et B deux sous-espaces topologiques d'un espace topologique $X = A \cup B$ On note i_A, j_A, i_B et j_B les inclusions suivantes:*

$$A \cap B \xrightarrow{i_A} A \xrightarrow{j_A} A \cup B$$

$$A \cap B \xrightarrow{i_B} B \xrightarrow{j_B} A \cup B.$$

et on suppose que

$$H_q(j_A) : H_q(A, A \cap B) \longrightarrow H_q(A \cup B, B)$$

est un isomorphisme pour tout entier q. (C'est le cas par excision lorsque A et B sont deux fermés de $A \cup B$ dont la réunion des intérieurs recouvre $A \cup B$.)

Alors la suite longue suivante est exacte:

$$\dots \xrightarrow{\partial^A_{q+1}} H_q(A \cap B) \xrightarrow{(H_q(i_A), H_q(i_B))} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{H_q(j_A) \oplus (-H_q(j_B))}$$
$$\xrightarrow{H_q(j_A) \oplus (-H_q(j_B))} H_q(A \cup B) \xrightarrow{\partial^A_q} H_{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{(H_{q-1}(i_A), H_{q-1}(i_B))} \dots$$

où $(H_q(i_A), H_q(i_B))(x) = (H_q(i_A)(x), H_q(i_B)(x))$, $(H_q(j_A) \oplus (-H_q(j_B)))(x, y) = H_q(j_A)(x) + (-H_q(j_B))(y)$ et ∂^A_q est la composition suivante

$$\partial^A_q : H_q(A \cup B) \xrightarrow{H_q(1_{A\cup B})} H_q(A \cup B, B) \xleftarrow{H_q(j_A)} H_q(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial(A, A\cap B, \emptyset)} H_{q-1}(A \cap B)$$

Démonstration : Montrons que $\partial^A_q \circ (H_q(j_A) \oplus (-H_q(j_B))) = 0$. Il suffit pour cela de montrer que $\partial^A_q \circ H_q(j_A)$ et $\partial^A_q \circ H_q(j_B)$ sont nulles. La deuxième égalité est immédiate puisque la deuxième composition passe par une composition de la suite longue de $(A \cup B, B, \emptyset)$ tandis que pour la première on remarque d'abord que $\partial^A_q \circ H_q(j_A)$ est égale à la composition

$$H_q(A) \xrightarrow{H_q(1_A)} H_q(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial(A, A\cap B, \emptyset)} H_{q-1}(A \cap B)$$

qui est une composition de la suite longue de $(A, A \cap B, \emptyset)$.

Montrons maintenant que le noyau de ∂^A_q est inclus dans l'image de $(H_q(j_A) \oplus (-H_q(j_B)))$. Soit $y \in H_q(A \cup B)$ tel que $\partial^A_q(y) = 0$. Alors, il existe $\alpha \in H_q(A)$ tel que, dans $H_q(A, A \cap B)$, on ait

$$(H_q(j_A)^{-1} \circ H_q(1_{A\cup B}))(y) = H_q(1_A)(\alpha)$$

et donc tel que, dans $H_q(A \cup B, B)$, on ait

$$H_q(1_{A\cup B})(y - H_q(j_A)(\alpha)) = 0.$$

Il existe alors $\beta \in H_q(B)$ tel que $(y - H_q(j_A)(\alpha)) = H_q(j_B)(-\beta)$. Ceci finit de montrer l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris en $H_q(A \cup B)$. L'exactitude en les 2 autres types de modules de la suite se montre de manière similaire et est laissée en exercice. $\diamond$

Exemple 2.32 Cette suite appliquée dans le cas où $A \cup B$ est une 3-variété M (compacte, connexe, orientée, sans bord), où A est le voisinage tubulaire d'un entrelacs L à k composantes K_1, K_2, $\dots K_k$ et où B est le complémentaire de l'intérieur de ce voisinage tubulaire permet de montrer (en exercice) :
Si M est une $\mathbf{Z}$-sphère $H_1(M \setminus L; \mathbf{Z}) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z}[m(K_i)]$. Si M est une $\mathbf{Q}$-sphère $H_1(M \setminus L; \mathbf{Q}) = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Q}[m(K_i)]$. Ici, $m(K_i)$ est le méridien de K_i qui, lorsque K_i est orienté par le pouce de la main droite, a l'orientation donnée par les autres doigts. (Le disque orienté qu'il borde est percé par K_i avec un signe $(+1)$.)

Définition 2.33 Soit K_1 et K_2 deux nœuds disjoints dans une sphère d'homologie rationnelle. Alors, on définit le *nombre d'enlacement* $\mathrm{lk}(K_1, K_2)$ de K_1 et K_2 comme le nombre rationnel tel que la classe d'homologie $[K_2]$ de K_2 dans $H_1(M \setminus K_1) = \mathbf{Q}[m(K_1)]$ soit égale à $\mathrm{lk}(K_1, K_2)[m(K_1)]$.

Exercice 2.34 Montrer que lorsque $M = S^3$, cette définition coïncide avec la définition de l'exemple 2.29.

Proposition 2.35 *Soit K un nœud dans une variété M de dimension 3 tel qu'il existe un entier d strictement positif minimum tel que $d[K] = 0$ dans $H_1(M)$. Soit $T(K)$ un voisinage tubulaire de K. Alors il existe une surface plongée compacte orientée connexe Σ dans $M \setminus Int(T(K))$ dont le bord $\partial\Sigma$ vérifie :*

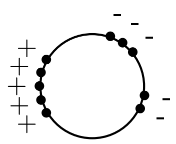
1. *$\partial\Sigma$ est inclus dans $\partial T(K)$,*
2. *$\partial\Sigma$ est homologue à $d[K]$ dans $T(K)$, et,*
3. *$\partial\Sigma$ est une réunion de courbes parallèles et orientées dans le même sens sur $\partial T(K)$.*

Démonstration : On suppose, sans perte de généralité, que M est triangulée et que K est plongé dans le 1-squelette de la triangulation. Ainsi K parcourt successivement les arêtes e_i, $i = 1, \ldots, p$ de la triangulation qu'on supposera orientées comme K, et il existe une *2-chaîne* c (combinaison linéaire de 2-simplexes de la triangulation) dont le bord $d_2(c)$ vaut $d \sum_{i=1}^{p} e_i$. Nous allons modifier c en une surface plongée.

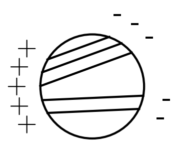
Soit $R(M^0)$ un voisinage du 0-squelette de la triangulation formé d'une réunion disjointe de boules voisinages des sommets de la triangulation. Soit $R(M^1)$ un voisinage du 1-squelette de la triangulation constitué de la réunion des boules de $R(M^0)$ connectées par des morceaux de voisinages des arêtes, deux à deux disjoints, et tous homéomorphes à $[0, 1] \times D^2$. Nous notons $T(e)$ le morceau correspondant à l'arête e et nous supposons que le voisinage tubulaire $T(K)$ est la réunion des $T(e_i)$, $i = 1, \ldots, p$ et des boules correspondant aux sommets traversés par K.

Nous commençons par modifier c de manière à obtenir une variété plongée hors de $R(M^1)$. Pour tout triangle Δ apparaissant dans c avec un coefficient $c(\Delta)$ non nul, nous plongeons $|c(\Delta)|$ copies de Δ qui sont parallèles à Δ en dehors d'un voisinage du bord de Δ où elles viennent s'accrocher. En coupe perpendiculaire à Δ dessiné en trait épais, nous voyons . Nous affectons alors à chaque copie l'orientation induite par celle de Δ si $c(\Delta) > 0$, et l'orientation opposée sinon. Cette opération a transformé c en une réunion de triangles orientés, qui a le même bord que c dans le 1-squelette, et dont l'intersection avec le complémentaire de $\mathrm{Int}(R(M^1))$ est une variété plongée orientée $\tilde{c}$.

L'étape suivante consiste à prolonger $\tilde{c}$ en une variété c' orientée plongée dans $M \setminus \mathrm{Int}\big(R(M^0) \cup T(K)\big)$. Pour cela nous fixons une arête e non parcourue par K et nous remarquons que $\tilde{c}$ intersecte $T(e) \cong [0, 1] \times D^2$ comme une réunion de segments $[0, 1] \times z$ orientés comme bord de $\tilde{c}$. Comme e n'est pas dans K il y a autant de segments orientés dans un sens que de segments orientés dans le sens opposé. Représentons alors une coupe $\{\frac{1}{2}\} \times D^2$ de $T(e)$ en repérant chaque point d'intersection $\{\frac{1}{2}\} \times z$ avec $\tilde{c}$ avec un signe correspondant à l'orientation de son segment.



Nous pouvons alors relier sur le disque tous les points deux par deux par des cordes disjointes qui relient chacune deux points de signes opposés.



En complétant $\tilde{c}$ par le produit de ce dessin (lissé) par l'intervalle, nous obtenons alors la variété c' voulue. Nous prolongeons alors c' sur les boules voisinages des sommets qui ne sont pas rencontrés par K en remarquant que c' intersecte les sphères bordant ces boules comme une sous-variété de dimension 1, donc comme une réunion de cercles emboîtés ou non que l'on peut reboucher par des disques à l'intérieur de ces boules. Nous obtenons ainsi une variété orientée plongée dans le complémentaire de l'intérieur de $T(K)$ dont le bord orienté est plongé dans $\partial T(K)$ et rencontre un méridien d'arête algébriquement d fois, ce qui entraîne qu'il est homologue à $d[K]$ dans $T(K)$. On fait disparaître du bord les éventuelles courbes qui borderaient des disques. Il ne reste alors que des courbes simples toutes parallèles et donc toutes homologues au signe près. Si elles ne sont pas toutes orientées de manière cohérentes on fait successivement disparaître les paires consécutives avec des orientations opposées en les connectant par des anneaux. On obtient ainsi la surface plongée souhaitée. Après avoir supprimé de cette surface toutes ses composantes connexes qui ne rencontrent pas le bord, cette surface est connexe (sinon la minimalité de d serait contredite), bien que son bord, lui, ne le soit pas nécessairement. $\diamond$

En corollaire, dans une $\mathbf{Z}$-sphère, tout nœud borde une surface plongée. En effet, le nœud est isotope à ses parallèles dans la variété, et l'un de ces parallèles borde la surface produite par la proposition précédente.

Proposition 2.36 *Soit K_1 et K_2 deux nœuds disjoints dans une sphère d'homologie rationnelle M. Soit $T(K_2)$ un voisinage tubulaire de K_2. Soit Σ_2 une surface orientée plongée dans $M \setminus Int(T(K_2))$ dont le bord est plongé dans $\partial T(K_2)$ et est homologue à $d[K_2]$ dans $T(K_2)$, pour un entier $d > 0$. Alors, le nombre d'intersection algébrique $< K_1, \Sigma_2 >$ de K_1 et Σ_2 est égal à $d\mathrm{lk}(K_1, K_2)$.*

Le nombre d'enlacement est symétrique:

$$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = \mathrm{lk}(K_2, K_1).$$

Démonstration : La surface $\tilde{\Sigma}_2$ obtenue en privant Σ_2 de petits disques centrés sur ses points d'intersection avec K_1 réalise un cobordisme entre d exemplaires de K_2 et $< K_1, \Sigma_2 >$ méridiens orientés. Dans $H_1(\tilde{\Sigma}_2)$, on a :

$$0 = [\partial \tilde{\Sigma}_2] = d[K_2] - < K_1, \Sigma_2 > [m(K_1)].$$

Ceci entraîne l'égalité $(d[K_2] =< K_1, \Sigma_2 > [m(K_1)])$ dans $H_1(M \setminus K_1)$ et montre la première assertion.

Pour démontrer la deuxième assertion, on choisit une surface orientée compacte Σ_1, transverse à Σ_2, de bord inclus dans $\partial T(K_1)$ et homologue à $d_1 K_1$ dans $T(K_1)$, pour un entier $d_1 > 0$. On note $\tilde{\Sigma_1}$ et $\tilde{\Sigma_2}$ l'intersection de Σ_1 et Σ_2 avec le complémentaire des intérieurs des deux voisinages tubulaires des nœuds. En considérant l'intersection orientée de $\tilde{\Sigma_1}$ et de $\tilde{\Sigma_2}$, on montre que le nombre d'intersection algébrique $< [\partial \tilde{\Sigma_1}], [\partial \tilde{\Sigma_2}] >_{\partial T(K_1) \cup \partial T(K_2)}$ est nul. (Exercice. Voir exercice 1.11.) On conclut alors grâce aux égalités suivantes :

$$0 =< [\partial \tilde{\Sigma_1}], [\partial \tilde{\Sigma_2}] >_{\partial T(K_1) \cup \partial T(K_2)} =< d_1[K_1] - d_1 \mathrm{lk}(K_2, K_1)[m(K_2)], d[K_2] - d\mathrm{lk}(K_1, K_2)[m(K_1)] >_{\partial T(K_1) \cup \partial T(K_2)}$$

$$=< d_1[K_1], -d\mathrm{lk}(K_1, K_2)[m(K_1)] >_{\partial T(K_1)} + < -d_1 \mathrm{lk}(K_2, K_1)[m(K_2)], d[K_2] >_{\partial T(K_2)}$$

où

$$< [m(K_1)], [K_1] >_{\partial T(K_1)} = 1 = - < [K_1], [m(K_1)] >_{\partial T(K_1)} .$$

$\diamond$

À une présentation de chirurgie entière $\mathbf{L} = (K_i; \mu_i)_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ dans une $\mathbf{Q}$-sphère M, on associe la matrice d'enlacement carrée d'ordre n

$$E(\mathbf{L}) = (\mathrm{lk}(\mu_j, K_i))_{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2} .$$

La $j^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice contient les coordonnées de

$$[\mu_j] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{lk}(\mu_j, K_i)[m(K_i)]$$

dans la base $([m(K_i)])_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ de $H_1(M \setminus L; \mathbf{Q})$. On montre alors encore avec la suite de Mayer-Vietoris associée à la décomposition $\chi(M; \mathbf{L})$ comme la réunion de l'extérieur de L dans M et du voisinage tubulaire de l'entrelacs $\hat{L}$ qui remplace L lors de la chirurgie que $E(\mathbf{L})$ est une matrice de présentation[10] de $H_1(\chi(M;\mathbf{L});\mathbf{Q})$ sur $\mathbf{Q}$, et de $H_1(\chi(M;\mathbf{L});\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$ lorsque M est une $\mathbf{Z}$-sphère. En particulier, $\chi(M;\mathbf{L})$ est une $\mathbf{Q}$-sphère si et seulement si le déterminant de $E(\mathbf{L})$ est non nul, et, lorsque M est une $\mathbf{Z}$-sphère, $\chi(M;\mathbf{L})$ est une $\mathbf{Z}$-sphère si et seulement si le déterminant de $E(\mathbf{L})$ est ± 1.

Étudions l'effet sur la matrice d'enlacement d'un deuxième mouvement de Kirby où une composante K_j *glisse le long* d'une composante K_i. Lors d'un tel mouvement aussi appelé *glissement*, la paire $(K_i;\mu_i)$ est inchangée tandis que la bande entre K_j et μ_j est changée en une somme en bandes avec une bande B' entre deux parallèles μ' et μ'' à K_i. La bande B' est incluse dans une bande dont une composante de bord est K_i, isotope à la bande B entre K_i et μ_i, et qui contient B. En particulier, B' est isotope à B. On note $(\tilde{K}_j = K_j\sharp_b\varepsilon\mu';\tilde{\mu}_j = \mu_j\sharp_b\varepsilon\mu'')$ le nœud parallélisé ainsi obtenu qui dépend de la bande utilisée pour faire la somme en bandes. Ici, $K_j\sharp_b\varepsilon\mu'$ désigne une somme en bandes de K_j avec $\varepsilon\mu'$ où $\varepsilon = \pm 1$ et (-1) est utilisé pour renverser l'orientation de μ'.

Les coefficients $\ell_{kl} = \mathrm{lk}(K_k,\mu_l)$ tels que k et l sont différents de j sont bien sûr inchangés lors d'un tel glissement. Lorsque k est différent de j, le coefficient $\ell_{jk} = \mathrm{lk}(K_j,\mu_k) = \mathrm{lk}(K_j,K_k) = \ell_{kj}$ est transformé en

$$\mathrm{lk}(K_j\sharp_b\varepsilon\mu_i,K_k) = \mathrm{lk}(K_j,K_k) + \varepsilon\mathrm{lk}(\mu_i,K_k) = \ell_{jk} + \varepsilon\ell_{ik}$$

comme on le voit facilement en utilisant la linéarité de $\mathrm{lk}(.,K_k)$ sur $H_1(S^3\setminus K_k)$. Le coefficient ℓ_{jj} est transformé en

$$\mathrm{lk}(\mu_j\sharp_b\varepsilon\mu_i,K_j\sharp_b\varepsilon K_i) = \ell_{jj} + 2\varepsilon\ell_{ij} + \ell_{ii}^2.$$

En particulier, si on regarde $E(\mathbf{L})$ comme la matrice d'une application bilinéaire symétrique b dans une base $(e_k)_{k=1,\dots,n}$. Le deuxième mouvement de Kirby transforme $E(\mathbf{L})$ en la matrice de b dans la base $(\tilde{e}_k)_{k=1,\dots,n}$ où $\tilde{e}_j = e_j + \varepsilon e_i$ et, $\tilde{e}_k = e_k$ si k est différent de j.

2.4 Rappels sur le π_1 et sur les revêtements.

On rappelle qu'un *chemin* d'un espace topologique X est une application continue de $[0,1]$ dans X, et que lorsque γ_1 et γ_2 sont deux chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, on définit la *composition des deux chemins* γ_1 et γ_2 comme le chemin $\gamma_1\gamma_2$ tel que :

$$\begin{array}{lll} \gamma_1\gamma_2(t) & = \gamma_1(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1\gamma_2(t) & = \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{array}.$$

L'inverse d'un chemin γ est le chemin $\overline{\gamma}$ qui associe $\gamma(1-t)$ à t.

Soit X un espace topologique connexe par arcs non vide muni d'un point base x_0. $x_0 \in X$.

Définition 2.37 Appelons *lacet* de X basé en x_0 une application continue

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$$

telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Définissons la relation d'équivalence qui relie deux tels lacets si et seulement si ils sont homotopes par une homotopie qui définit un lacet basé en x_0 en tout temps. Soit $\pi_1(X,x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces lacets pour cette relation, muni du produit induit par la composition des chemins. Ce produit est bien compatible avec la relation d'homotopie à extrémités fixées et munit $\pi_1(X,x_0)$ d'une structure de groupe pour laquelle l'élément neutre est la classe du lacet constant et l'inverse de la classe d'un lacet γ est la classe du lacet $\overline{\gamma}$. (L'application H telle que :

$$\begin{array}{lll} H(t,u) & = \gamma(2ut) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ H(t,u) & = \gamma(2u(1-t)) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{array}.$$

est une homotopie du lacet constant $(u=0)$ à $\gamma\overline{\gamma}$.) Soit c un chemin tel que $c(0) = x_0$. L'application de $\pi_1(X,x_0)$ dans $\pi_1(X,c(1))$ qui envoie la classe d'un lacet γ sur la classe de $\overline{c}(\gamma c)$ est un isomorphisme de groupes. $\pi_1(X,x_0)$ est appelé le *groupe fondamental* de X.

[10] C'est la matrice d'une application linéaire f telle que $H_1(M)$ est isomorphe au conoyau de f.

Exemple 2.38 Si X est contractile, $\pi_1(X) = \{1\}$. Ainsi, $\pi_1(\mathbf{R}^n) = 1$.

Soit n un entier tel que $n > 1$. Comme tout lacet de $S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ basé en 0 est homotope à un lacet qui évite le point ∞, tout lacet de S^n est homotope au lacet constant. Ainsi,

$$\pi_1(S^n) = \{1\}.$$

Comme le quotient de l'intervalle par l'identification de ses deux extrémités est homéomorphe au cercle S^1, les lacets basés en x_0 sont aussi vus comme les applications continues de S^1 dans X qui envoient 1 sur x_0. On a une application naturelle

$$h_1 : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X; \mathbf{Z})$$

qui envoie un lacet $(f : S^1 \longrightarrow X)$ sur $H_1(f)([S^1])$.

Exercice 2.39 Montrer que l'application ci-dessus est un morphisme de groupe surjectif.

Ce morphisme se factorise bien sûr par l'abélianisation de $\pi_1(X, x_0)$ dans son abélianisé $\frac{\pi_1(X,x_0)}{[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]}$ et définit en fait un isomorphisme

$$h_1 : \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]} \xrightarrow{\cong} H_1(X; \mathbf{Z})$$

Si g est une application continue de X dans un espace topologique connexe par arcs Y, g induit le morphisme de groupes noté $\pi_1(g)$ ou g_* de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(Y, g(x_0))$ qui envoie la classe d'un lacet γ vers la classe du lacet $g \circ \gamma$.

Définition 2.40 Un *revêtement* est une application continue $p : E \longrightarrow X$ telle que tout élément x de X ait un voisinage $V(x)$ *trivialement revêtu par* p, c'est-à-dire un voisinage dont la préimage par p s'écrit comme une réunion disjointe :

$$p^{-1}(V(x)) = \coprod_{i \in I} V_i$$

où la restriction de p à chaque V_i est un homéomorphisme de V_i dans $V(x)$. On dit alors que les V_i sont des *copies* de $V(x)$.

Exemple 2.41

$$\begin{array}{rccc} \exp(2i\pi.) : & \mathbf{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \mapsto & \exp(2i\pi t) \end{array}$$

est un revêtement.

Théorème 2.42 (Relèvement des homotopies) *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. Soit $h : A \times [0,1] \longrightarrow X$ une homotopie d'un espace topologique A dans X, et soit $\tilde{h}_0 : A \times \{0\} \longrightarrow E$ un* relèvement *de h sur $A \times \{0\}$, c'est-à-dire une application continue telle que $p \circ \tilde{h}_0 = h_{|A \times \{0\}}$. Alors il existe une unique homotopie $\tilde{h} : A \times [0,1] \longrightarrow E$ qui prolonge $\tilde{h}_0$ ($\tilde{h}_{|A \times \{0\}} = \tilde{h}_0$) et qui relève h ($p \circ \tilde{h} = h$).*

Démonstration : Démontrons d'abord l'unicité. Notons qu'il suffit de la démontrer dans le cas où A se réduit à un singleton $\{a\}$. Donnons-nous dans ce cas deux relèvements $\tilde{h}$ et h' qui prolongent $\tilde{h}_0$, et montrons que $B = \{t \in [0,1]; \tilde{h}(a,t) = h'(a,t)\}$ est ouvert et fermé, ce qui impliquera que $B = [0,1]$. Soit $t \in [0,1]$, et soit $V(h(a,t))$ un voisinage de $h(a,t)$ trivialement revêtu par p, alors il existe un voisinage de t dont les images par $\tilde{h}$ et h' sont chacune incluses dans une copie fixée de $V(h(a,t))$. Ce voisinage est alors entièrement inclus dans B ou dans son complémentaire. L'ensemble B et son complémentaire sont donc ouverts.

Pour démontrer l'existence de $\tilde{h}$, il suffit maintenant de démontrer que tout élément a de A a un voisinage $V(a)$, tel que $\tilde{h}_{0|V(a)\times\{0\}}$ se prolonge en un relèvement de h sur $V(a) \times I$. En effet, tous les relèvements se recolleront bien grâce à la propriété d'unicité. Soit C l'ensemble des éléments u de $[0,1]$ tels qu'il existe un voisinage $V_0(a)$ de a tel que $\tilde{h}_{0|V_0(a)\times\{0\}}$ se prolonge en un relèvement de h sur $V_0(a) \times [0,u]$. Soit t la borne supérieure de C. Il existe un voisinage connexe $V_t(a) \times V(t)$ de (a,t) dont l'image par h est incluse dans un voisinage $V(h(a,t))$ de $h(a,t)$ trivialement revêtu par p. Ce voisinage intersecte un espace $V_0(a) \times [0,u]$ où un relèvement $\tilde{h}$ de h qui prolonge $\tilde{h}_{0|V_0(a)\times\{0\}}$ a déjà été défini. Soit $V(a)$ la composante connexe de a dans $V_t(a) \cap V_0(a)$, et soit V_i la copie de $V(h(a,t))$ telle que $\tilde{h}(V(a) \times ([0,u] \cap V(t))) \subset V_i$. Alors la composition de h par l'inverse de la restriction de p à V_i prolonge $\tilde{h}$ en un relèvement de h sur $V(a) \times ([0,u] \cup V(t))$, ce qui montre que $t = 1$, puis que $C = [0,1]$ et conclut la démonstration de la proposition. $\diamond$

En corollaire, si $p : E \longrightarrow X$ est un revêtement, et si E est connexe par arcs,

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(X, p(e_0))$$

est injective. (Exercice.)

Un tel revêtement est dit *régulier* si $p_*(\pi_1(E,e_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(X, p(e_0))$. Dans ce cas, $\frac{\pi_1(X,p(e_0))}{p_*(\pi_1(E,e_0))}$ agit sur E comme suit, soit γ un lacet de X basé en $p(e_0)$, soit $e \in E$ et soit c un chemin de E tel que $c(0) = e_0$ et $c(1) = e$. Soit $r(\gamma(p \circ c))$ le relèvement de $\gamma(p \circ c)$ à E tel que $r(\gamma(p \circ c))(0) = e_0$. On pose $[\gamma]e = r(\gamma(p \circ c))(1)$. On vérifie facilement que cette définition en est bien une (c'est-à-dire qu'elle est indépendante des différents choix impliqués. (Exercice.) De plus, cette action est simple et transitive sur les *fibres* $p^{-1}(p(e))$, et l'application

$$\begin{array}{lcl} \frac{\pi_1(X,p(e_0))}{p_*(\pi_1(E,e_0))} & \longrightarrow & p^{-1}(p(e)) \\ [\gamma] & \mapsto & [\gamma]e \end{array}$$

est une bijection. (Exercice.)

Exemples 2.43 Soit E un groupe topologique, c'est-à-dire un espace topologique muni d'une structure de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications continues. Soit 1_E l'unité de E. Soit G un sous-groupe de E, et soit $G\backslash E$ le quotient de E par la relation d'équivalence $\sim$ telle que $e \sim e'$ si et seulement si $ee'^{-1} \in G$. Supposons que l'application quotient $p : E \longrightarrow G\backslash E$ est un revêtement régulier. Alors la bijection ci-dessus définit un isomorphisme de groupes $\frac{\pi_1(G\backslash E, p(1_E))}{p_*(\pi_1(E,1_E))}$ dans la fibre $G = p^{-1}(p(1_E))$. (Exercice.)

1. Le revêtement $\exp(2i\pi.) : \mathbf{R} \longrightarrow S^1 = \mathbf{Z}\backslash(\mathbf{R}, +)$ rentre dans ce cadre. Ainsi,

$$\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}.$$

2. Soit $\mathbf{H}$ l'espace vectoriel complexe des matrices $\begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$, notées $\alpha + j\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$. L'espace $\mathbf{H}$ est muni de la norme euclidienne sur l'espace vectoriel réel de dimension 4 sous-jacent telle que $||\alpha + j\beta||^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Ses éléments de norme 1 constituent le groupe $SU(2)$. On voit ainsi que la multiplication des matrices munit $\mathbf{H}$ d'une structure de corps non commutatif, muni d'une norme multiplicative. Ce corps est le corps des *quaternions*. Le groupe $SU(2)$, qui est homéomorphe à S^3, agit sur $\mathbf{H}$ par conjugaison :

$$g.(h \in \mathbf{H}) = ghg^{-1} = \phi_g(h)$$

La conjugaison fixe le centre $Z(\mathbf{H})$ isomorphe à $\mathbf{R}$ de $\mathbf{H}$, qui est formé des matrices scalaires réelles. De plus, elle respecte la norme euclidienne de $\mathbf{H}$. Elle laisse donc le sous-espace vectoriel euclidien $Z(\mathbf{H})^\perp = i\mathbf{R} + j\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ isomorphe à $\mathbf{R}^3$ orthogonal à $Z(\mathbf{H})$ stable. On définit ainsi un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rlcl} P : & S^3 = SU(2) & \longrightarrow & SO(3) \\ & g & \mapsto & \phi_{g|Z(\mathbf{H})^\perp} \end{array}$$

On vérifie en exercice que ce morphisme est un revêtement *double* (où les fibres ont deux éléments). En particulier,

$$\pi_1(SO(3)) = \frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}$$

Pour tout sous-groupe fini G de $SO(3)$, $p \circ P : S^3 \longrightarrow G\backslash SO(3)$ est un revêtement régulier. On en déduit

$$\pi_1(G\backslash SO(3)) = P^{-1}(G)$$

Dans le cas où G est le groupe isomorphe à $\mathcal{A}_5$ des isométries positives de $\mathbf{R}^3$ qui préservent un icosaèdre (ou un dodécaèdre) régulier, $\pi_1(\mathcal{A}_5\backslash SO(3))$ est un groupe de cardinal 120. On peut vérifier en exercice (facultatif) que son abélianisé est trivial. Ainsi, $\mathcal{A}_5\backslash SO(3)$ est une sphère d'homologie de dimension 3 distincte de S^3.

Exercice 2.44 Montrer

$$\pi_1(L(p,q)) \cong \frac{\mathbf{Z}}{p\mathbf{Z}}.$$

Définition 2.45 Un espace topologique X est dit *simplement connexe* si il est connexe par arcs et si son π_1 est *trivial*, c'est-à-dire réduit à $\{1\}$. Un espace topologique X est dit *localement simplement connexe* si pour tout point x de X et pout tout voisinage $V_1(x)$ de x dans X, il existe un voisinage simplement connexe $V(x)$ de x inclus dans $V_1(x)$. De même, un espace topologique X est dit *localement connexe par arcs* si tout point de X a une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 2.46 (Relèvement des applications dans la base) *Soit $p : E \longrightarrow X$ un revêtement. Soit $f : A \longrightarrow X$ une application continue d'un espace topologique A connexe par arcs, localement connexe par arcs, dans la* base du revêtement X. *Soit $a_0 \in A$ et $e_0 \in E$ deux points tels que $f(a_0) = p(e_0)$. Alors, si*

$$f_*(\pi_1(A, a_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

il existe un unique relèvement (continu) $\tilde{f}$ de f ($p \circ \tilde{f} = f$) tel que $\tilde{f}(a_0) = e_0$.

Démonstration : Soit $a \in A$, alors il existe un chemin c de A tel que $c(0) = a_0$ et $c(1) = a$. D'après le théorème de relèvement des homotopies, le chemin de X, $f \circ c$ a un unique relèvement $r(f \circ c)$ à E tel que $r(f \circ c)(0) = e_0$. Si le relèvement $\tilde{f}$ de l'énoncé existe, $\tilde{f} \circ c$ est un relèvement de $f \circ c$ qui coïncide avec $r(f \circ c)$ en 0 et donc sur $[0, 1]$. En particulier,

$$\tilde{f}(a) = \tilde{f} \circ c(1) = r(f \circ c)(1).$$

Ceci montre l'unicité du relèvement $\tilde{f}$ si il existe. Pour montrer son existence, on définit $\tilde{f}(a)$ comme $r(f \circ c)(1)$, et on montre que cette définition est indépendante du chemin c choisi et que $\tilde{f}$ est continue. Montrons l'indépendance du chemin choisi. Soit c' un autre chemin tel que $c'(0) = a_0$ et $c'(1) = a$. Alors, $f \circ (c.\overline{c'})$ est un lacet de X qui se relève en $r(f \circ c)\overline{r'(f \circ c')}$, où $r'(f \circ c')$ est le relevé de $f \circ c'$ tel que $r'(f \circ c')(1) = r(f \circ c)(1)$, et il suffit de montrer que $r'(f \circ c')(0) = e_0$ pour conclure que la définition est indépendante du chemin choisi. Or, l'hypothèse sur les π_1 entraîne que $f \circ (c.\overline{c'})$ est homotope au composé par p d'un lacet de E (par une homotopie qui fixe les images de 0 et 1). En relevant l'homotopie correspondante et en utilisant l'unicité du relèvement du chemin constant de l'homotopie en 1, on obtient bien $r'(f \circ c')(0) = e_0$. Pour montrer la continuité en un point a, on fixe un chemin c de a_0 à a, on choisit un voisinage $V(f(a))$ de $f(a)$ trivialement revêtu par p et un voisinage connexe par arcs $V(a)$ de a tel que $f(V(a)) \subset V(f(a))$, et on utilise, pour définir l'image par $\tilde{f}$ des points de $V(a)$, des chemins composés cc_1 où c_1 prend ses valeurs dans $V(a)$. Ainsi, si V_i est la copie de $V(f(a))$ telle que $\tilde{f}(a) \in V_i$, $r(f \circ (cc_1))$ est de la forme $r(f \circ c)p_{|V_i}^{-1} \circ c_1$, et $\tilde{f}_{|V(a)}$ est de la forme $p_{|V_i}^{-1} \circ f$ et est donc continue en a. ◇

Notons que la condition sur le π_1 de la proposition précédente est toujours réalisée lorsque A est simplement connexe.

Définition 2.47 Deux revêtements au-dessus d'une même base $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X$ sont dits équivalents si il existe un homéomorphisme $h : E \longrightarrow E'$ tel que $p' \circ h = p$.

Théorème 2.48 (Revêtement associé à un sous-groupe de $\pi_1(X)$) *Soit X un espace topologique connexe par arcs localement simplement connexe. Soit $x_0 \in X$ et soit G un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$. Alors, il existe un revêtement $p : E \longrightarrow X$, où E est un espace topologique connexe par arcs qui contient un point e_0 tel que $p(e_0) = x_0$, tel que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = G$. Ce revêtement est unique à équivalence de revêtements près.*

Démonstration : On construit d'abord l'ensemble E comme l'ensemble des classes d'équivalence des chemins c de X tels que $c(0) = x_0$, pour la relation d'équivalence $\sim$ définie par :
$c \sim c'$ si et seulement si $c(1) = c'(1)$ et la classe d'homotopie du lacet $c\overline{c'}$ appartient à G. L'application p envoie la classe du chemin c sur $c(1)$. On munit alors E de la topologie telle qu'une base de voisinage de la classe d'un chemin c soit constituée des voisinages de la forme $V(V(c(1)); 1)$ où $V(c(1))$ est un voisinage simplement connexe de $c(1)$ et $V(V(c(1)); 1)$ est l'ensemble des classes de chemins de la forme cc' où c' est un chemin tel que $c'(0) = c(1)$ qui prend ses valeurs dans $V(c(1))$. On vérifie en exercice que $p : E \longrightarrow X$ est bien un revêtement tel que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = G$.

Pour l'unicité, on utilise la proposition précédente qui, pour un revêtement $p' : E' \longrightarrow X$, nous fournit :

- un homéomorphisme $h : E \longrightarrow E'$ tel que $p' \circ h = p$, et

- un homéomorphisme $h' : E' \longrightarrow E$ tel que $p \circ h' = p'$,

et nous montre par unicité des relèvements que $h \circ h' = \text{Identité}(E')$ et $h' \circ h = \text{Identité}(E)$. $\diamond$

Lorsque $G = \{1\}$, le revêtement du théorème est appelé *revêtement universel* de X.

2.5 Le polynôme d'Alexander des nœuds dans les sphères d'homologie rationnelle.

Définition 2.49 Un sous-espace C d'un espace topologique X est un *rétract* de X si il existe une application continue $r : X \longrightarrow C$ appelée *rétraction* telle que $r \circ i = \text{Identité}(C)$ où i désigne l'inclusion de C dans X. Un rétract C de X est un *rétract par déformation de* X lorsque de plus $i \circ r$ est homotope à l'identité de X.

Lemme 2.50 *Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée dont le bord est non vide. Il existe un corps en anses H_g de genre g et un CW-complexe relatif (C, H_g) avec seulement des cellules de dimension 2, tel que C soit un rétract par déformation de X.*

Démonstration : On part d'une triangulation de X. On définit H_g comme le corps en anses voisinage régulier du 1-squelette de cette triangulation. L'adhérence Y du complémentaire de H_g est aussi un corps en anses (voisinage du 1-squelette dual) qui intersecte ∂X comme une réunion finie de disques disjoints. On définit alors C comme la réunion

- de H_g,

- de g disques méridiens de H_g dont les bords forment un ∂Y-système qui ne rencontre pas ∂X,

- et de tous les disques de $Y \cap \partial X$, sauf un que l'on appelle D_0

Ainsi, la rétraction par déformation de la boule sur son bord privé d'un disque, appliquée à la boule B attachée à C pour reconstituer X produit la rétraction par déformation cherchée. On rétracte B sur $\partial B \setminus \text{Int}(D_0)$. $\diamond$

La caractéristique d'Euler d'un CW-complexe fini est la somme $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \sharp\Sigma_i$ où $\sharp\Sigma_i$ désigne le nombre de ses cellules de dimension i. (Exercice.) Les calculs d'homologie des variétés de dimension 3 compactes orientables sans bord entraînent que la caractéristique d'Euler de ces variétés est nulle. Plus généralement, on a

Lemme 2.51 *Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée. Alors*

$$\chi(X) = \frac{1}{2}\chi(\partial X)$$

Démonstration : Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée dont le bord est non vide.

$$\partial X = \coprod_{i=1}^{n} \Sigma_i$$

où $\Sigma_i = \partial H_i$ est le bord d'un corps en anses de genre g_i Alors $\chi(\partial X) = \sum_{i=1}^{n}(2-2g_i)$, et $\chi(\coprod_{i=1}^{n} H_i) = \sum_{i=1}^{n}(1-g_i)$. On déduit de la suite de Mayer-Vietoris appliquée à la réunion de X et de la réunion disjointe des H_i que

$$\chi(X) + \chi(\coprod_{i=1}^{n} H_i) = \chi(X \cup_{\partial X} (\coprod_{i=1}^{n} H_i)) + \chi(\partial X)$$

ce qui entraîne le résultat. $\diamond$

Le nombre r de cellules du CW-complexe relatif (C, H_g) du lemme 2.50 est donc donné par

$$r - g + 1 = \chi(X) = \frac{1}{2}\chi(\partial X).$$

En particulier, si X est l'extérieur d'un entrelacs dans une variété compacte sans bord orientable, $\chi(X) = 0$ et $g = r + 1$.

Lemme 2.52 *Soit X et Y deux espaces topologiques connexes par arcs localement simplement connexes. Soit $x \in X$. Supposons qu'il existe deux applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f(x) = x$, et telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes à l'identité de X et de Y relativement à x ou $f(x)$ (c'est-à-dire par des homotopies qui fixent x ou $f(x)$) . Alors, $f_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ et $g_* : \pi_1(Y, f(x)) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Soit G un sous-groupe de $\pi_1(X, x)$, soit $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement associé à G par le théorème 2.48, et soit $q : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ le revêtement associé à $f_*(G)$. Soit $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ et soit $\tilde{y} \in q^{-1}(f(x))$. Alors, les applications $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, uniquement définies par la proposition 2.46, telles que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}$, $\tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{x}$, $q \circ \tilde{f} = f \circ p$ et $p \circ \tilde{g} = g \circ q$ sont des équivalences d'homotopies inverses homotopiques l'une de l'autre : $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ sont homotopes à l'identité relativement à $\tilde{x}$ ou $\tilde{y}$. De plus, si G est un sous-groupe normal de $\pi_1(X, x)$, et si γ est un élément du quotient $\frac{\pi_1(X,x)}{G}$, alors, pour tout élément e de $\tilde{X}$, on a*

$$\tilde{f}(\gamma.e) = (f_*(\gamma)) . \tilde{f}(e)$$

Démonstration : Exercice. $\diamond$

Lemme 2.53 *Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée dont le bord est non vide. Soit x et x' deux éléments de X. Alors, il existe une équivalence d'homotopie entre (X, x) et (X, x') qui est homotope à l'identité de X.*

Démonstration : Si x et x' sont dans l'intérieur de X, alors ils sont contenus dans l'intérieur d'une même boule plongée dans X (le voisinage régulier d'un arc qui les joint). Il existe une isotopie de cette boule qui transporte x sur x' en fixant son bord. Dans ce cas, (X, x) et (X, x') sont donc homéomorphes par un homéomorphisme isotope à l'identité. Il suffit maintenant par transitivité de traiter le cas où x est dans l'intérieur de X et x' est sur le bord de X. Dans ce cas, on considère une boule B plongée dans X qui contient x et x' sur son bord et qui intersecte le bord de X selon un disque D centré en x'. On prolonge alors à X une rétraction par déformation de B sur $B \setminus \mathrm{Int}(D)$, pour obtenir l'équivalence d'homotopie cherchée. $\diamond$

Définition 2.54 Une *présentation finie par générateurs et relations* d'un module $\mathcal{H}$ sur un anneau Λ est une suite exacte de la forme

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda \gamma_i \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

qui réalise $\mathcal{H}$ comme le conoyau d'une application entre deux modules libres. Une telle présentation est dite *injective* si l'application d est injective. On écrira souvent une telle présentation de la manière équivalente suivante :

$$\mathcal{H} =< \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g | d(e_1), d(e_2), \ldots, d(e_r) >,$$

où les γ_i sont les *générateurs* de cette présentation tandis que les $d(e_j)$, qui sont des combinaisons à coefficients dans Λ des γ_i, sont appelés *relateurs* ou *relations* de la présentation. Le *défaut* d'une telle présentation est l'entier $(g - r)$.

Lemme 2.55 *Deux présentations*

$$\mathcal{H} =< \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g | \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r >,$$

et

$$\mathcal{H} =< \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{g'} | \rho'_1, \ldots, \rho'_{r'} >,$$

du même module sur un anneau Λ commutatif unitaire intègre s'obtiennent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations d'un des types suivants :

1. *Permutation des générateurs,*
2. *Ajout (ou retrait) simultané d'un générateur γ_0 et d'une relation de la forme $\rho_0 = \gamma_0 - \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \gamma_i$, où $\lambda_i \in \Lambda$.*
3. *Permutation des relations ou ajout (ou retrait) d'une relation qui est combinaison Λ-linéaire des autres relations.*

Si de plus, $\mathcal{H}$ a une présentation finie injective de défaut δ, alors toutes les autres présentations finies de $\mathcal{H}$ de défaut δ sont injectives et s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une suite finie d'opérations des deux premiers types précédents et par une opération d'isomorphisme sur les relations qui consiste à appliquer un automorphisme ψ de $\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda \rho_j$ pour transformer $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$ en $(\psi(\rho_1), \ldots, \psi(\rho_r))$.

Démonstration : Une suite finie d'opérations du deuxième type nous permet de nous ramener à comparer des présentations qui ont le même ensemble de générateurs, sans changer le défaut de ces présentations, ni l'injectivité. En effet, la deuxième opération nous permet d'ajouter les générateurs que l'on veut en même temps qu'une relation qui les exprime en fonction du précédent système de générateurs.

Les relations d'une présentation sont alors nécessairement combinaisons linéaires de celles de l'autre présentation et la première partie du lemme en découle.

Supposons maintenant que les deux présentations ont le même ensemble ordonné de générateurs et que la première présentation est injective. La première présentation est donc donnée par une suite exacte

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda \gamma_i \xrightarrow{p} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

où d est un isomorphisme de $\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j$ dans $\mathrm{Ker}(p)$, tandis que la deuxième est donnée par une suite exacte

$$\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j \xrightarrow{d'} \bigoplus_{i=1}^{g} \Lambda \gamma_i \xrightarrow{p} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

où d' est une surjection de $\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j$ dans $\mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $d^{-1}_{|\mathrm{Ker}(p)} \circ d'$ est un endomorphisme surjectif de $\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j$. Son déterminant est donc inversible dans Λ puisque l'application induite sur $\bigwedge^r \left(\bigoplus_{j=1}^{r} \Lambda e_j \right)$ est surjective. Ceci entraîne que $d^{-1}_{|\mathrm{Ker}(p)} \circ d'$ est injective, donc que la deuxième présentation est injective, puis que $d^{-1}_{|\mathrm{Ker}(p)} \circ d'$ réalise l'isomorphisme cherché sur les relations. $\diamond$

Définition 2.56 Une présentation finie d'un module par générateurs et relations est dite *carrée* si son défaut est nul. La matrice de l'application linéaire d associée à la présentation est alors carrée. Lorsqu'un module a une présentation carrée sur un anneau commutatif unitaire intègre Λ, on définit son *ordre* comme le déterminant d'une de ses présentations carrées. L'ordre d'un tel module est défini à une multiplication par une *unité* (élément inversible) près.

Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée dont le bord est non vide. Soit $x \in X$. On considère le revêtement $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ associé (par le théorème 2.48) au noyau $\mathrm{Ker}(\rho)$ du morphisme naturel

$$\rho : \pi_1(X,x) \longrightarrow \frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}$$

et l'action sur $\tilde{X}$ de

$$\frac{\pi_1(X,x)}{\mathrm{Ker}(\rho)} \cong \frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}.$$

Pour tout $g \in \frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}$, on note ϕ_g l'homéomorphisme de $\tilde{X}$ qui envoie $e \in \tilde{X}$ sur $g.e$. Cet homéomorphisme induit l'isomorphisme $H_1(\phi_g)$ sur $H_1(\tilde{X}, p^{-1}(x); \mathbf{Q})$. Définissons

$$\Lambda_X = \mathbf{Q}[\frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}]$$

comme l'espace vectoriel de base $\frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}$ où l'élément de base associé à $g \in \frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}$ est noté $\exp(g)$.

$$\Lambda_X = \bigoplus_{g \in \frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))}} \mathbf{Q}\exp(g)$$

Munissons alors Λ_X de la structure d'algèbre sur $\mathbf{Q}$ dont la multiplication envoie $(\exp(g), \exp(g'))$ sur $\exp(g+g')$.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base du $\mathbf{Z}$-module libre

$$\frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}(H_1(X))} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{Z}e_i$$

Alors, le morphisme d'anneaux de l'anneau $\mathbf{Q}[t_i^{\pm 1}]_{i=1\ldots k}$ de polynômes de Laurent en les variables t_i dans Λ_X qui associe $\exp(e_i)$ à t_i est un isomorphisme d'anneaux.

On note

$$\mathcal{H}_X = H_1(\tilde{X}, p^{-1}(x); \mathbf{Q})$$

et on munit $\mathcal{H}_X$ de la structure de Λ_X-module pour laquelle $\exp(g).\alpha = H_1(\phi_g)(\alpha)$.

D'après le travail préliminaire effectué dans ce paragraphe, le module $\mathcal{H}_X$ est un invariant topologique de X indépendant de $x \in X$, et si D est un rétract par déformation de X, alors $\mathcal{H}_X = H_1(p^{-1}(D), p^{-1}(x); \mathbf{Q}))$. De plus, si D est un CW-complexe, et si $g_\alpha(B^i)$ est une cellule de D munie d'un point $g_\alpha(0)$ de son intérieur, l'application $g_\alpha : B^i \longrightarrow D$ a, pour tout point de la fibre $p^{-1}(g_\alpha(0))$ au-dessus de $g_\alpha(0)$, un unique relèvement qui envoie 0 sur ce point (voir proposition 2.46). De plus, tous ces relèvements se restreignent à des plongements sur l'intérieur de B^i, et s'obtiennent l'un à partir de l'autre par l'action d'un élément de $\frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}}$. Ainsi, $p^{-1}(D)$ est un CW-complexe *équivariant* sous l'action de $\frac{H_1(X)}{\mathrm{Torsion}}$ (cette action transforme cellule en cellule).

On admet qu'il existe une théorie d'homologie qui vérifie, en plus des axiomes déjà cités, l'axiome suivant :

Pour toute réunion disjointe (non nécessairement finie) $\coprod_{i \in I} X_i$ d'espaces topologiques, pour tout entier $q \in \mathbf{Z}$

$$H_q(X) = \oplus_{i \in I} H_q(X_i)$$

(c'est le cas de l'homologie singulière). Alors, le calcul de l'homologie des CW-complexes infinis se traite comme celui des CW-complexes finis.

En particulier, l'espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ $H_i(p^{-1}(D^i), p^{-1}(D^{i-1}); \mathbf{Q})$ librement engendré par les cellules de dimension i de $p^{-1}(D)$ est le Λ_X-module librement engendré par les cellules de dimension i de D (ou plutôt par un relèvement de ces cellules pour chaque cellule). De plus, les applications

$$d_i = \partial(p^{-1}(D^i), p^{-1}(D^{i-1}), p^{-1}(D^{i-2})) : H_i(p^{-1}(D^i), p^{-1}(D^{i-1}); \mathbf{Q}) \longrightarrow H_i(p^{-1}(D^{i-1}), p^{-1}(D^{i-2}); \mathbf{Q})$$

commutent avec l'action de $\frac{H_1(X)}{\text{Torsion}}$.

Exemples 2.57 **1.** Soit X l'extérieur (homéomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$) de l'entrelacs de Hopf formé des âmes des deux tores pleins du scindement de Heegaard de genre 1 de S^3, alors

$$H_1(X) = \mathbf{Z}m_1 \oplus \mathbf{Z}m_2 = \frac{H_1(X)}{\text{Torsion}}$$

où m_1 et m_2 désignent les méridiens des deux composantes de l'entrelacs.

$$\Lambda_X = \mathbf{Q}[\exp(\pm m_1), \exp(\pm m_2)]$$

L'espace X se rétracte par déformation sur $S^1 \times S^1$. On calcule $\mathcal{H}_X = H_i(p^{-1}(S^1 \times S^1), p^{-1}(1,1))$ en utilisant la structure de CW-complexe de $S^1 \times S^1$ déjà décrite avec $(1,1)$ pour seule 0-cellule, $m_1 = S^1 \times 1$ et $m_2 = 1 \times S^1$ comme cellules de dimension 1, et une cellule B de dimension 2, dont le bord s'écrit comme le lacet $m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1}$ dans le groupe fondamental du 1-squelette. On note $\tilde{m}_1$ et $\tilde{m}_2$ les relevés de m_1 et m_2 qui commencent en un relevé préféré e de $(1,1)$. Notons que, par définition de l'action, ces relevés se terminent respectivement en $\exp(m_1).e$ et $\exp(m_2).e$. Le bord de B se relève comme le chemin composé $\tilde{m}_1\ (\exp(m_1).\tilde{m}_2)\ \overline{\exp(m_2)\tilde{m}_1}\ \overline{\tilde{m}_2}$, c'est-à-dire comme le bord du rectangle ci-dessous qui se plonge dans $\tilde{X}$.

$$\begin{tikzcd}
\exp(m_2).e \arrow[r, "\exp(m_2).\tilde{m}_1"] & \exp(m_1+m_2).e \\
e \arrow[u, "\tilde{m}_2"] \arrow[r, "\tilde{m}_1"] & \exp(m_1).e \arrow[u, "\exp(m_1).\tilde{m}_2"']
\end{tikzcd}$$

(On détermine les relevés à utiliser par leurs valeurs en un point.)

Ainsi, un relevé $\tilde{B}$ de B s'attache sur ce rectangle comme le rectangle plein qu'il délimite sur le dessin.

Par conséquent, $\mathcal{H}_X$ est le premier module d'homologie du complexe de chaînes Λ_X-linéaire suivant

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2 = \Lambda_X[\tilde{B}] \xrightarrow{d_1} C_1 = \Lambda_X \tilde{m}_1 \oplus \Lambda_X \tilde{m}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

où

$$d_1(\tilde{B}) = (1 - \exp(m_2))\tilde{m}_1 + (\exp(m_1) - 1)\tilde{m}_2$$

et $\mathcal{H}_X$ est le conoyau de d_1 qui admet la présentation par générateurs et relations $\mathcal{H}_X = < \tilde{m}_1, \tilde{m}_2 | d_1(\tilde{B}) >$.

$$\mathcal{H}_X = \frac{\Lambda_X \tilde{m}_1 \oplus \Lambda_X \tilde{m}_2}{\Lambda_X d_1(\tilde{B})}$$

2. On considère le nœud torique K_{pq} de $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ image de $(z \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2} z^p, \frac{\sqrt{2}}{2} z^q))$ et le nœud V image de $(z \mapsto (z, 0))$. Soit X l'extérieur de l'entrelacs formé de ces deux nœuds.

$$H_1(X) = \mathbf{Z}m \oplus \mathbf{Z}m_V$$

où m est le méridien de K_{pq} et m_V est le méridien de V. La variété X se rétracte par déformation sur D où (D, H_1) est le CW-complexe relatif suivant :
H_1 est le sous-espace de S^3 formé des couples (z_1, z_2) tels que $|z_1| \leq \frac{1}{2}$, homéomorphe au tore plein $D^2 \times S^1$;

et D a une cellule de dimension 1 qui est le méridien m de K_{pq} attachée à $D^2 \times S^1$ en un point x de ∂H_1 et une cellule B de dimension 2 dont l'adhérence est le bord d'un voisinage tubulaire de K_{pq} et dont le bord est attaché le long du lacet $m\ell_{pq}m^{-1}\ell_{pq}^{-1}$ de $H_1 \cup_{\{x\}} m$ où ℓ_{pq} désigne le parallèle de K_{pq} image de $(z \mapsto (\frac{1}{2}z^p, \frac{\sqrt{3}}{2}z^q))$. En rétractant H_1 sur son âme U (image de $(z \mapsto (0,z))$), on obtient une équivalence d'homotopie entre X et le CW-complexe formé d'une cellule x de dimension 0, de deux cellules de dimension 1, m et U, et de la cellule B de dimension 2, dont le bord s'écrit $mU^qm^{-1}\left(U^q\right)^{-1}$ dans le groupe fondamental du 1-squelette. Ainsi, $\mathcal{H}_X$ est le premier module d'homologie du complexe de chaînes Λ_X-linéaire suivant

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_2 = \Lambda_X[\tilde{B}] \xrightarrow{d_1} C_1 = \Lambda_X\tilde{m} \oplus \Lambda_X\tilde{m}_V \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

où

$$d_1(\tilde{B}) = (1-\exp(qU))\tilde{m} + (\exp(m)-1)\left[\tilde{U} + \exp(U)\tilde{U} + \exp(2U)\tilde{U} + \ldots + \exp((q-1)U)\tilde{U}\right]$$

et $U = m_V + \mathrm{lk}(U, K_{pq})m = m_V + pm$.

$$d_1(\tilde{B}) = (1-\exp(qU))\tilde{m} + (\exp(m)-1)\frac{\exp(qm_V + pqm) - 1}{\exp(m_V + pm) - 1}\tilde{U}$$

On en déduit que $\mathcal{H}_X$, qui est le conoyau de d_1, admet la présentation par générateurs et relations

$$\mathcal{H}_X = < \tilde{m}, \tilde{U} | d_1(\tilde{B}) > .$$

Définition 2.58 Soit X une variété de dimension 3 compacte connexe orientée dont le bord est non vide. Soit

$$\mathcal{H}_X = < \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g | \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r >,$$

une présentation P de $\mathcal{H}_X$ de défaut $\left(g - r = 1 - \frac{\chi(\partial X)}{2}\right)$ (qui existe d'après le travail effectué dans le début de ce paragraphe). On suppose $\chi(\partial X) \leq 2$. On définit *l'application d'Alexander* $F_P(X)$ de X associée à P comme l'application Λ-multilinéaire alternée

$$\begin{array}{rlcl} F_P(X): & \mathcal{H}_X^{g-r} & \longrightarrow & \Lambda_X \\ & (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{g-r}) & \mapsto & \frac{\text{dét}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{g-r})}{\text{dét}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)} \end{array}$$

où les ρ_i sont des combinaisons Λ-linéaires des γ_i, et les éléments α_i de $\mathcal{H}_X$ sont représentés par des combinaisons Λ-linéaires des γ_i. Comme les combinaisons qui représentent un même α_i de $\mathcal{H}_X$ diffèrent d'une combinaison linéaire de ρ_i, cette application est bien définie. De plus, d'après le lemme 2.55, si P et P' sont deux présentations de $\mathcal{H}_X$, alors il existe une unité $q\exp(g)$ de Λ_X (c'est-à-dire un élément de la forme $q\exp(g)$ tel que $q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ et $g \in \frac{H_1(X)}{\text{Torsion}}$) telle que $F_P(X) = q\exp(g)F_{P'}(X)$. (Si P n'est pas injective, $F_P(X)$ est nulle pour toute présentation de $\mathcal{H}_X$ de défaut $\left(1 - \frac{\chi(\partial X)}{2}\right)$.)

Soit P une présentation de $\mathcal{H}_X$ sur Λ_X. Soit $K(\Lambda_X)$ le corps des fractions de Λ_X. Notons $\mathcal{H}_X \otimes_{\Lambda_X} K(\Lambda_X)$ l'espace vectoriel sur $K(\Lambda_X)$ qui a la même présentation P que $\mathcal{H}_X$ mais vue comme une présentation sur $K(\Lambda_X) \supset \Lambda_X$. Si $\mathcal{H}_X$ a une présentation injective de défaut $\left(g - r = 1 - \frac{\chi(\partial X)}{2}\right)$, alors $\mathcal{H}_X \otimes_{\Lambda_X} K(\Lambda_X)$ est un espace vectoriel de dimension $g - r$, et $F_P(X)$ s'étend en une application multilinéaire de $(\mathcal{H}_X \otimes_{\Lambda_X} K(\Lambda_X))^{g-r}$ dans $K(\Lambda_X)$.

En particulier, lorsque X est l'extérieur d'un entrelacs, $F_P(X)$ définit une application Λ_X-linéaire de $\mathcal{H}_X$ dans Λ_X. Fixons $e \in p^{-1}(x)$.

$$\partial_1 : \mathcal{H}_X = H_1(\tilde{X}, p^{-1}(X); \mathbf{Q}) \longrightarrow H_0(p^{-1}(X); \mathbf{Q}) = \Lambda_X[e] = \Lambda_X$$

est une autre application Λ_X-linéaire de $\mathcal{H}_X$ dans Λ_X qui est non nulle. En particulier, il existe un élément $\tau(X)$ de $K(\Lambda_X)$ appelé *torsion de Reidemeister* de X, défini à une multiplication par une unité de Λ_X près, tel que $F_P(X) = \tau(X)\partial_1$.

Le travail déjà effectué montre que $\tau(X)$ est un invariant topologique de X.

Exemple 2.59 Calculons la torsion des deux entrelacs des exemples 2.57.

$$\tau\left(S^3 \setminus \operatorname{Int}\left(T(U \cup V)\right)\right) = \frac{F_P(\tilde{m}_1)}{\partial_1(\tilde{m}_1)} = -\frac{\exp(m_1)-1}{\exp(m_1)-1} = -1 \sim 1$$

où $\sim$ signifie "égal aux unités de Λ_X près".

$$\tau\left(S^3 \setminus \operatorname{Int}\left(T(K_{pq} \cup V)\right)\right) = \frac{F_P(\tilde{m})}{\partial_1(\tilde{m})} = -\frac{\exp(qm_V+pqm)-1}{\exp(m_V+pm)-1} \sim \frac{t_1^{pq}t_2^q-1}{t_1^p t_2-1}$$

en posant $t_1 = \exp(m)$ et $t_2 = \exp(m_V)$.

Exercice 2.60 Montrer que, lorsque le rang de $H_1(X)$ est strictement supérieur à 1, $\tau(X) \in \Lambda_X$.

Dans le cas particulier où X est l'extérieur d'un entrelacs à plusieurs composantes $K_1, \dots, K_n$ dans une sphère d'homologie entière, $H_1(X)$ est librement engendré par les méridiens $m_1, \dots, m_n$ de ces composantes, et la torsion exprimée dans les variables $t_i = \exp(m_i)$ est un polynôme défini à une multiplication par un monôme non nul près appelé *polynôme d'Alexander à plusieurs variables* de l'entrelacs.

Lorsque K est un nœud dans une sphère d'homologie rationnelle M

$$\frac{H_1(M \setminus K)}{\text{Torsion}} = \mathbf{Z}g$$

Dans ce module, le méridien m de K s'écrit kg, pour un entier k que l'on suppose positif (quitte à changer g en $(-g)$); et on écrit

$$\exp(g) = t^{\frac{1}{k}}$$

et

$$\Lambda_X = \mathbf{Q}[t^{\pm\frac{1}{k}}].$$

L'entier k est égal à 1 lorsque M est une sphère d'homologie entière. Soit g un lacet de X basé en x dont la classe d'homologie est le générateur g de $\frac{H_1(M\setminus K)}{\text{Torsion}}$ ci-dessus. Soit $\tilde{g}$ son relevé qui commence au point $e \in p^{-1}(x)$ de $\tilde{X}$ fixé. On définit le *polynôme d'Alexander* $\Delta(K \subset M)$ de K, comme le polynôme en $t^{-\frac{1}{k}}$ défini aux unités de $\Lambda_{M\setminus K}$ près comme $F_P\left(M \setminus \operatorname{Int}(T(K))\right)(\tilde{g})$ où P est une présentation de $\mathcal{H}_X$ de défaut 1.

Exercice 2.61 Montrer que ce polynôme ne s'annule pas en $(t^{\frac{1}{k}} = 1)$.

On normalise donc $\Delta(K \subset M)$ en le multipliant par un rationnel non nul de sorte qu'il prenne la valeur 1 en $(t^{\frac{1}{k}} = 1)$ de sorte que $\Delta(K \subset M)$ est maintenant défini à une multiplication par un élément de Λ_X de la forme $t^{\frac{p}{k}}$ pour un entier p. En fait, il existe un (nécessairement unique) entier p tel que la multiplication par $t^{\frac{p}{2k}}$ transforme $\Delta(K)$ en un polynôme symétrique de $(\mathbf{Q}[t^{\pm\frac{1}{2k}}] \supset \Lambda_{M\setminus K})$ par rapport à l'involution d'anneaux de $\mathbf{Q}[t^{\pm\frac{1}{2k}}]$ qui échange $t^{\frac{1}{2k}}$ et $t^{-\frac{1}{2k}}$. Le polynôme symétrique ainsi obtenu est le *polynôme d'Alexander normalisé* de K dans M.

Exercice 2.62 Montrer que $H_1(\widetilde{M \setminus K}; \mathbf{Q})$ a une présentation carrée sur $\Lambda_{M\setminus K}$ et que $\Delta(K \subset M)$ est son ordre.

La symétrie du polynôme d'Alexander peut se démontrer en résolvant l'exercice suivant long et facultatif.

Exercice 2.63 Soit K un nœud dans une sphère d'homologie rationnelle M dont le méridien m s'écrit kg pour un entier k strictement positif dans

$$\frac{H_1(M \setminus K)}{\text{Torsion}} = \mathbf{Z}g.$$

Soit Σ une surface compacte connexe orientée dans $M \setminus \operatorname{Int}(T(K))$ dont le bord est formé de s courbes homologiquement identiques et non triviales sur $\partial T(K)$.

Soit $i : \partial\Sigma \hookrightarrow \Sigma$ l'inclusion. On définit la forme de Seifert V de $(\Sigma \subset M)$ comme l'application bilinéaire de $\left(\frac{H_1(\Sigma;\mathbf{Z})}{H_1(i)(H_1(\partial\Sigma))}\right)^2$ dans $\mathbf{Q}$ telle que si x et y sont deux courbes de Σ et si y^+ désigne la courbe parallèle à y dans la direction de la normale positive à la surface, alors

$$V([x],[y]) = \mathrm{lk}(x,y^+)$$

1. Montrer que cette forme est bien définie.
2. Montrer que le polynôme d'Alexander normalisé de $(K \subset M)$ est

$$\Delta^N(K \subset M) = \frac{t^{\frac{s}{2k}} - t^{-\frac{s}{2k}}}{s(t^{\frac{1}{2k}} - t^{-\frac{1}{2k}})}\mathrm{d\acute{e}t}\left(t^{\frac{1}{2k}}V - t^{-\frac{1}{2k}}\ {}^tV\right).$$

À titre d'exemple, nous allons montrer le lemme suivant pour illustrer l'utilité de l'application d'Alexander.

Lemme 2.64 *Soit (K_1, K_2) un entrelacs à deux composantes dans une sphère d'homologie M. Soit X l'extérieur de (K_1, K_2) dans M (i.e. le complémentaire de l'intérieur d'un voisinage tubulaire de (K_1, K_2) dans M). Notons*

$$\phi : \frac{H_1(X;\mathbf{Z})}{Torsion} \longrightarrow \frac{H_1(M\setminus K_1;\mathbf{Z})}{Torsion}$$

le morphisme induit par l'inclusion, et

$$\phi_* : \Lambda_X \longrightarrow \Lambda_{M\setminus K_1}$$

le morphisme qu'il induit. Alors, à une multiplication par une unité de $\Lambda_{M\setminus K_1}$ près,

$$\phi_*(\tau(X)) = (\exp(m_1)^{lk(K_1,K_2)} - 1)\tau(M\setminus Int(T(K_1)))$$

où m_1 désigne la classe d'homologie du méridien de K_1.

Démonstration : On joint les deux composantes de l'extérieur X de (K_1, K_2) par un arc plongé α, et on note Y le complémentaire dans X d'un voisinage régulier de cet arc. Le bord ∂Y de Y est une surface de genre 2. Soit $F_P(Y)$ une application d'Alexander de Y, c'est une application bilinéaire de $\mathcal{H}_Y^2$ dans $\Lambda_Y = \Lambda_X$.

Soit δ un disque méridien de α dont le bord $\partial\delta$ est un lacet de ∂Y basé en un point $(x \in \partial Y)$. Soit m_1, ℓ_1, m_2, ℓ_2 quatre lacets de ∂Y basés en x, qui représentent respectivement un méridien de K_1, un parallèle orienté de K_1, un méridien de K_2 et un parallèle orienté de K_2, de sorte que les égalités suivantes soient vérifiées dans $\pi_1(\partial Y, x)$.

$$\partial\delta = \ell_1 m_1 \ell_1^{-1} m_1^{-1} = m_2 \ell_2 m_2^{-1} \ell_2^{-1}$$

Notons que tout élément x de $\pi_1(Y,x)$ définit une classe d'homotopie $[\tilde{x}]$ à extrémités fixées de chemins de $\tilde{Y}$ commençant en $e \in p^{-1}(x)$ et donc un élément de $\mathcal{H}_Y$. On utilise cette identification naturelle pour évaluer les applications d'Alexander sur des éléments du π_1.

Il existe une présentation P' de $\mathcal{H}_X = \frac{\mathcal{H}_Y}{\Lambda_X \partial\delta}$ telle que :

$$F_{P'}(X) = F_P(Y)(\partial\delta, .)$$

En particulier

$$\tau(X) = \frac{F_P(Y)(\partial\delta, m_1)}{\partial_1 m_1} = \frac{F_P(Y)((1-\exp(\ell_2))m_2 + (\exp(m_2)-1)\ell_2, m_1)}{\exp(m_1)-1}$$

Il existe une présentation P'' de $\mathcal{H}_{M\setminus K_1}$ telle que :

$$F_{P''}(M\setminus K_1) = \phi_*(F_P(Y)(m_2, .)).$$

On en déduit:

$$\tau(M \setminus K_1) = \phi_* \left(\frac{F_P(Y)(m_2, m_1)}{\exp(m_1) - 1} \right)$$

Comme :

$$\phi_*(\exp(m_2)) = 1 \quad \text{et} \quad \phi_*(\exp(m_1)) = \exp(m_1),$$

on conclut facilement. $\diamond$

Exercice 2.65 Soit K_{pq} le nœud torique (p, q) de l'exemple 2.57.
1. Montrer que

$$\tau(S^3 \setminus K_{pq}) = \frac{t^{pq} - 1}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$$

avec $t = \exp(m)$.
2. Montrer que

$$\Delta(K_{pq} \subset S^3) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

Exercice 2.66 Soit S une variété de dimension 3 compacte connexe orientée sans bord telle que $\frac{H_1(S;\mathbf{Z})}{\text{Torsion}} = \mathbf{Z}g$.
1. Montrer qu'il existe une $\mathbf{Q}$-sphère M et un nœud K dont la classe dans $H_1(M; \mathbf{Z})$ est nulle tels que

$$S = \chi(M; (K; 0)).$$

2. Soit $\tilde{S}$ le revêtement connexe de S associé au noyau de l'application naturelle de $\pi_1(S, s \in S)$ dans $\frac{H_1(S;\mathbf{Z})}{\text{Torsion}}$. Soit

$$\Lambda_S = \mathbf{Q}[\frac{H_1(S; \mathbf{Z})}{\text{Torsion}}] = \mathbf{Q}[t, t^{-1}]$$

avec $t = \exp(g)$. Montrer que $H_1(\tilde{S}; \mathbf{Q})$ a une présentation carrée sur Λ_S, et qu'en définissant le *polynôme d'Alexander* de S comme l'ordre de $H_1(\tilde{S}; \mathbf{Q})$ sur Λ_S, on a

$$\Delta(S) = \Delta(K \subset M).$$

3. Montrer qu'il existe une infinité de variétés de dimension 3 compactes connexes orientées sans bord telles que $H_1(S; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.

Exercice 2.67 Soit M une $\mathbf{Q}$-sphère, on définit la forme d'enlacement comme l'application

$$\begin{array}{cccc} E: & H_1(M; \mathbf{Z}) \times H_1(M; \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Z}} \\ & ([x], [y]) & \mapsto & \mathrm{lk}(x, y) \end{array}$$

lorsque x et y sont des courbes disjointes plongées dans M de classes d'homologie respectives $[x]$ et $[y]$.
1. Montrer que E est bien définie.
2. Soit g un générateur du H_1 de l'espace lenticulaire $L(3, 1)$. Calculer $E(g, g)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme du lenticulaire $L(3, 1)$ dans lui-même qui renverse l'orientation.

References

Basic references

[Gr] M. J. Greenberg, *Lectures on algebraic topology.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1967).

[Hi] M. Hirsch, *Differential topology,* GTM, Springer-Verlag (1976).

[Liv] C. Livingston, *Knot theory.* Carus Mathematical Monographs **24**, Mathematical Association of America, Washington, DC, (1993).

[Mas] W. Massey, *Algebraic topology: an introduction.* Reprint of the 1967 edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977

[Mil] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint.* Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[Spa] E. Spanier, *Algebraic topology* The University Press of Virginia (1965, 1969), Springer-Verlag, New York, 19??. xvi+528 pp.

[Spi] M. Spivak, *Calculus on manifolds.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1965).

Complementary references

[CF] Crowell and Fox, *Introduction to knot theory.* GTM, Springer-Verlag (1977).

[He] Hempel, *3-manifolds,* Annals of Mathematics Studies **86**, Princeton University Press (1976).

[Li] W.B.R. Lickorish, *An introduction to knot theory,* GTM, Springer-Verlag (1997).

[Ro] D. Rolfsen, *Knots and links,* Publish or Perish, Berkeley (1976).

References for specific results

[Ca1] S. S. Cairns, *Triangulation of the manifold of class one,* Bull. AMS, **41**, (1935), 549–552.

[Ca2] S. S. Cairns, *Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds,* Ann. of Math., **41**, (1940), 796–808.

[Cerf] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie,* Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **39** (1970).

[FR] R. Fenn et C. Rourke, *On Kirby's calculus of links,* Topology **18**, (1979), 1–15.

[K] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3.* Inventiones Math. **45**, (1978), 35–56.

[Ku] N. H. Kuiper, *A short history of triangulations and related matters.* Proc. bicenten. Congr. Wiskd. Genoot., Part I, Amsterdam 1978, Math. Cent. Tracts **100**, (1979), 61–79.

[Li] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial* 3*-manifolds,* Ann. Math. **76**, (1962), 531–540.

[Mo] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds,* Ann. of Math. **56**, (1952), 96–114.

[Mu] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms,* Ann. of Math. **72**, (1960), 521–554.

[P1] H. Poincaré, *Second complément à l'analysis situs,* Proc. Lond. Math. Soc. **32**, (1900), 277–308.

[P2] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs,* Rend. Circ. Mat. Palermo **18**, (1904), 45–110.

[R-T] N. Reshetikhin and V. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups,* Invent. math. **103**, (1991), 547–597.

[Ro] C. Rourke, *A new proof that Ω_3 is zero,* Jour. London Math. Soc. **31**, (1985), 373–376.

[Rolf] D. Rolfsen, *A new proof that Ω_3 is zero,* Jour. London Math. Soc. **31**, (1985), 373–376.

[S] L. C. Siebenmann, *Les bissections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer. Un retour aux sources,* Prépublication d'Orsay **80 T16**, (1980).

[W] A. W. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds. I, II,* Can. J. Math, **12**, (1960), 503–528.

[Wh] J.H.C. Whitehead, *Manifolds with transverse fields in euclidean space.* Ann. of Math. **73**, (1961), 154–212.

[Whi] H. Whitney, *Differentiable manifolds,* Ann. of Math. **37**, (1936), 645–680.

References about the Casson invariant

[GM] L. Guillou et A. Marin, *Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension 3,* L'Enseignement Math. **38**, (1992), 233–290.

[L] C. Lescop, *On the Casson invariant,* European Congress of Mathematics, Vol. I (Budapest, 1996), 296–312, Progr. Math., 168, Birkhuser, Basel, 1998.

[M] A. Marin, *Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension 3 (d'après Casson),* Semin. Bourbaki, 40ème Année, Vol. 1987/88, Exp. No.693, Astérisque **161-162**, (1988), 151–164.

[Wa] K. Walker, *An Extension of Casson's Invariant,* Annals of Mathematics Studies, **126**, Princeton University Press, Princeton 1992.

References about finite type invariants

[Ba] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants.* Topology **34**, No. 2, (1995), 423-472.

[GGP] S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak, *Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds.* Geometry and Topology, Vol. 5 (2001) Paper no. 3, pages 75–108.

[Hab] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links.*Geometry and Topology **4** (2000), 1-83.

[KuTh] G. Kuperberg, D. P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology,* preprint, math.GT/9912167.

[Les] C. Lescop, *Introduction to the Kontsevich Integral of Framed Tangles*, June 1999, Summer School in Grenoble, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜lescop/.

[O] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres.* Journal of knot theory and its ramifications **5**, (1996) 101–115.