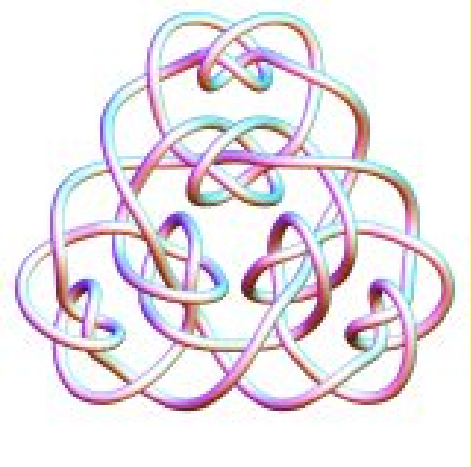
# Nœuds en mathématiques

Christine Lescop

INSTITUT FOURIER

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES



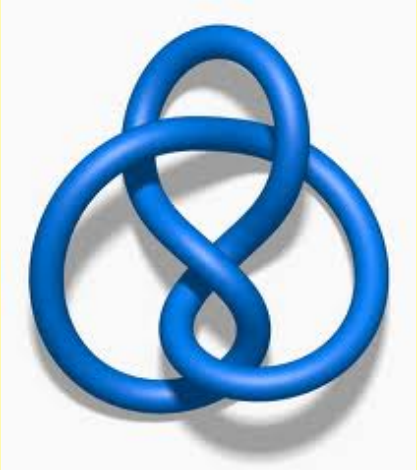
# Nos premiers exemples

Le nœud de trèfle droit

# Nos premiers exemples

Le nœud de trèfle droit

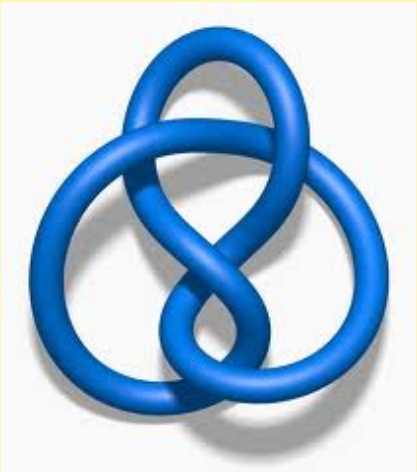
Le nœud en huit



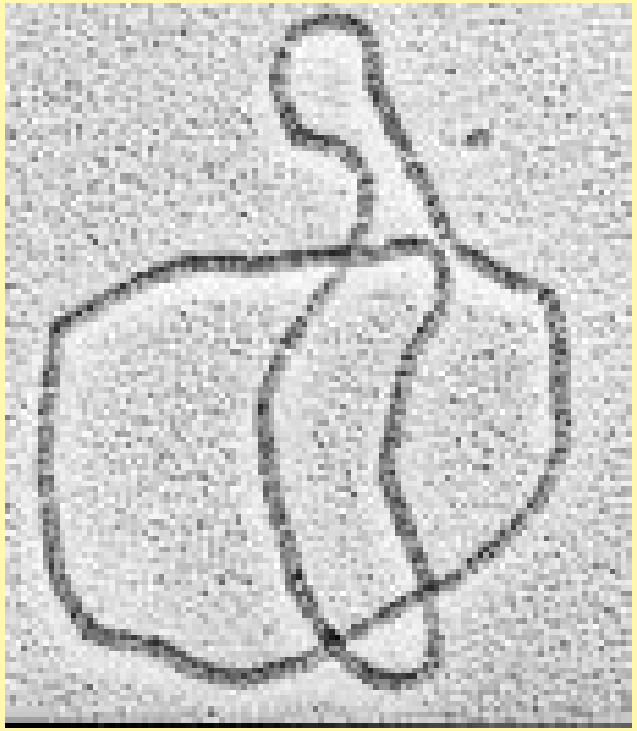
# Nos premiers exemples

Le nœud de trèfle droit

Le nœud en huit

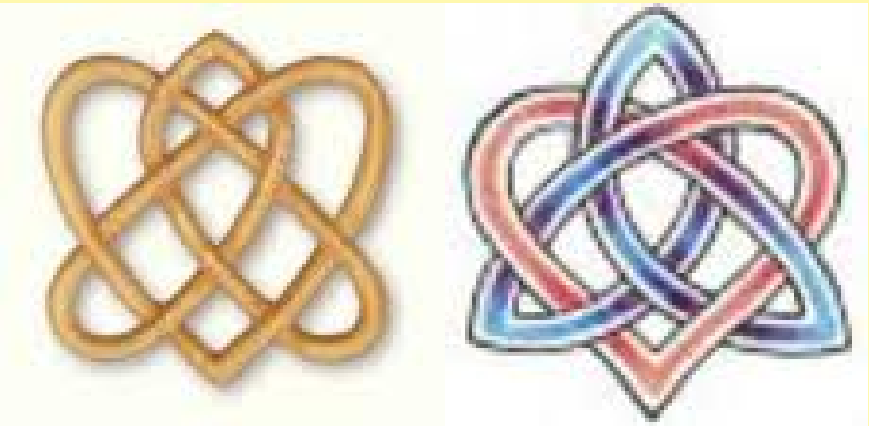


# Des nœuds dans notre ADN



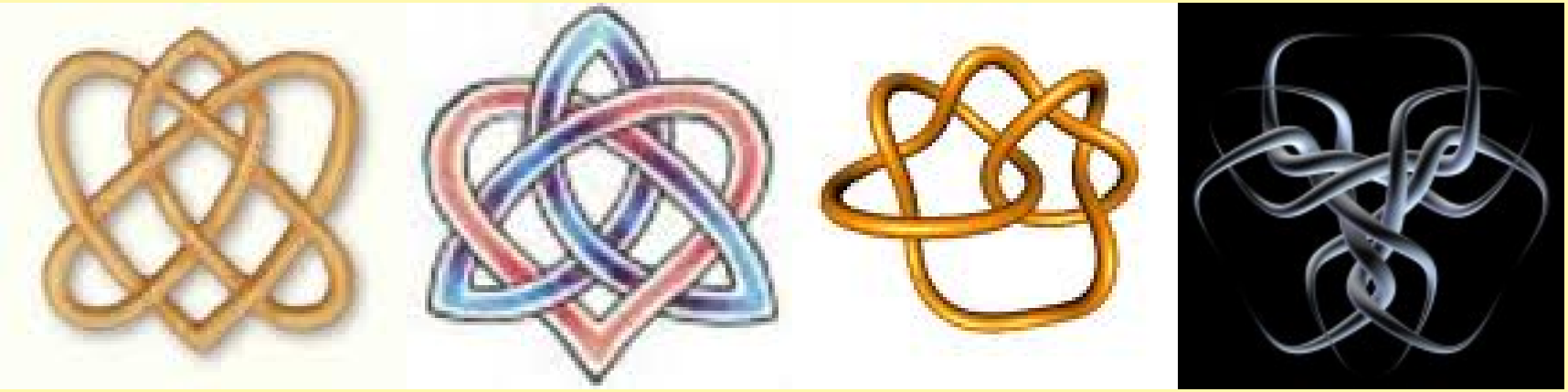
# Des exemples plus jolis

# Des exemples plus jolis

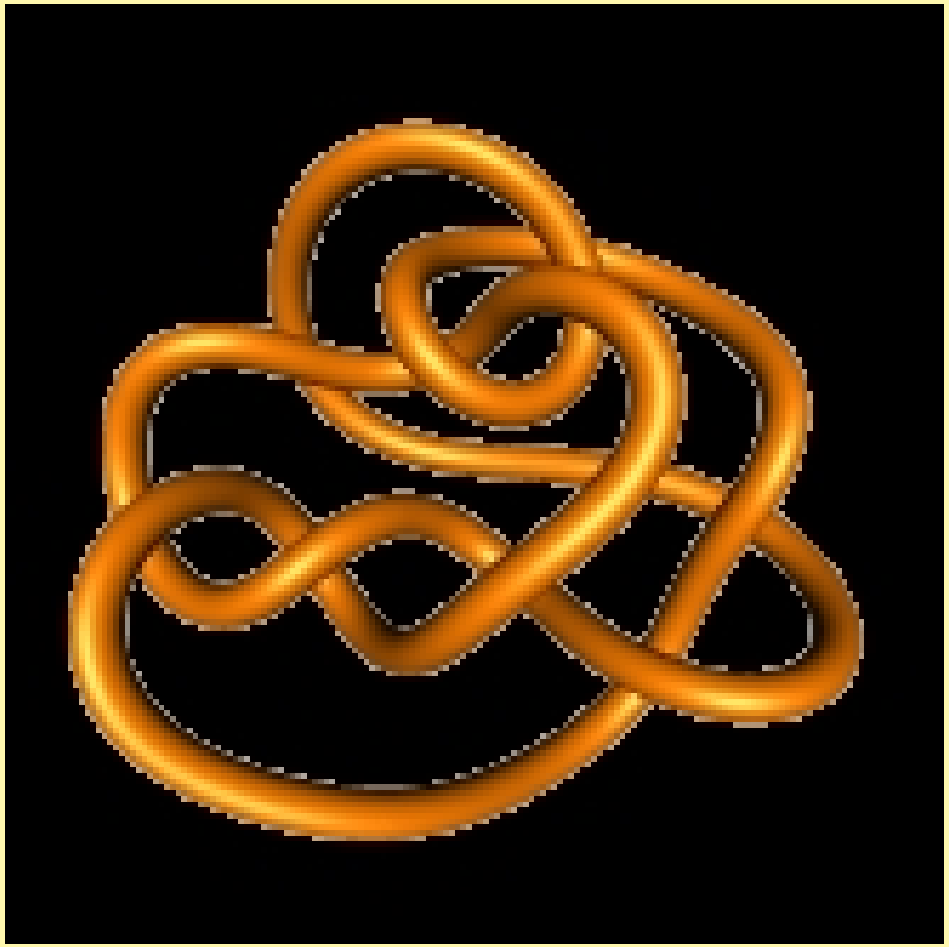


# Des exemples plus jolis

# Des exemples plus jolis



# Un diagramme de nœud



# Un diagramme de nœud trivial

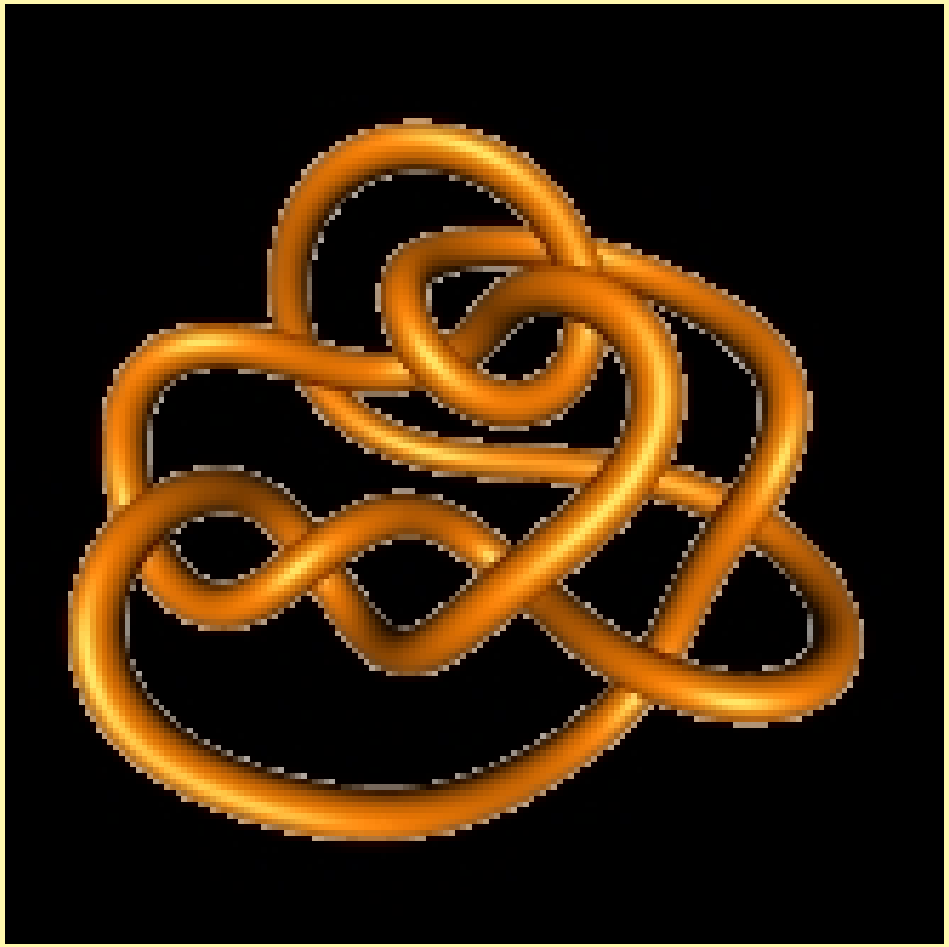
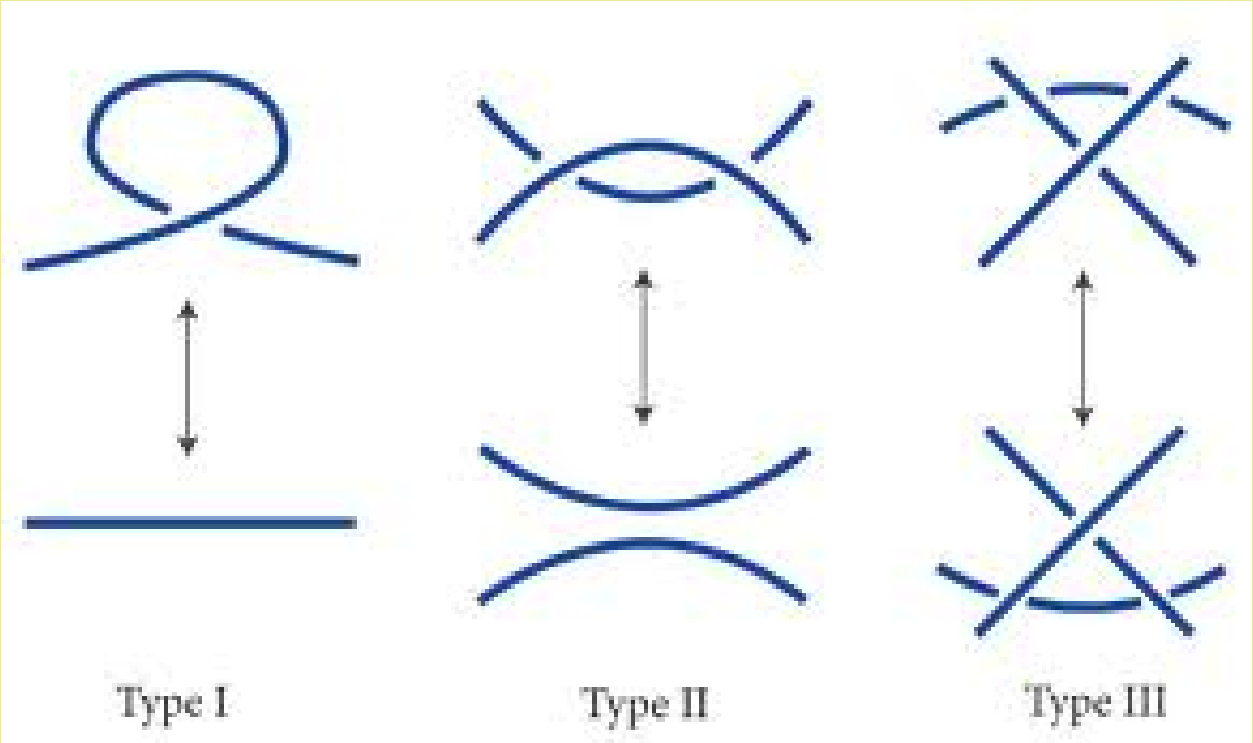


Image comme la plupart ici extraite de http://www.knotplot.com/

# Le théorème de Reidemeister (1930)

## Théorème

Deux diagrammes (dessins de nœuds) représentent le même nœud si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements locaux d'un des trois types suivants :



# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés,

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et

sont alternés,

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

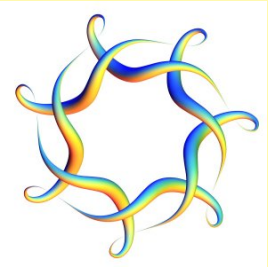
a 7 croisements séparateurs.

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

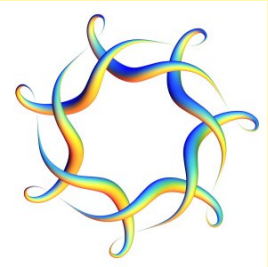
 a 7 croisements séparateurs.

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

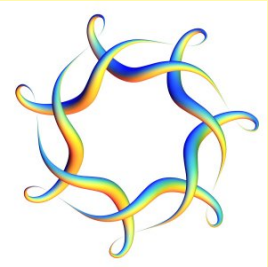
 a 7 croisements séparateurs. en a 3.

# Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

et sont alternés, mais pas .

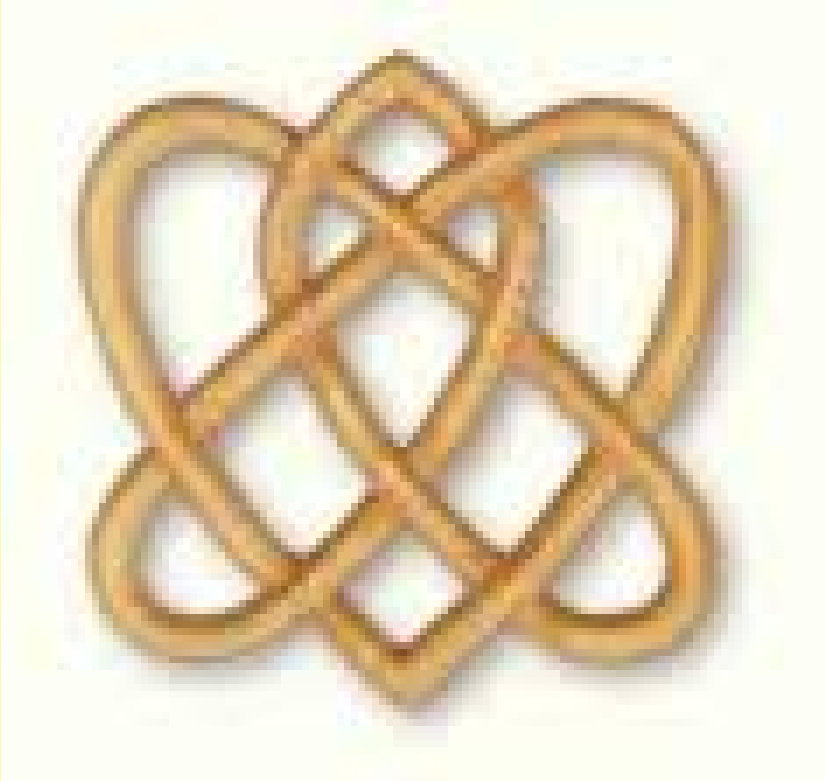
Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

 a 7 croisements séparateurs. en a 3.

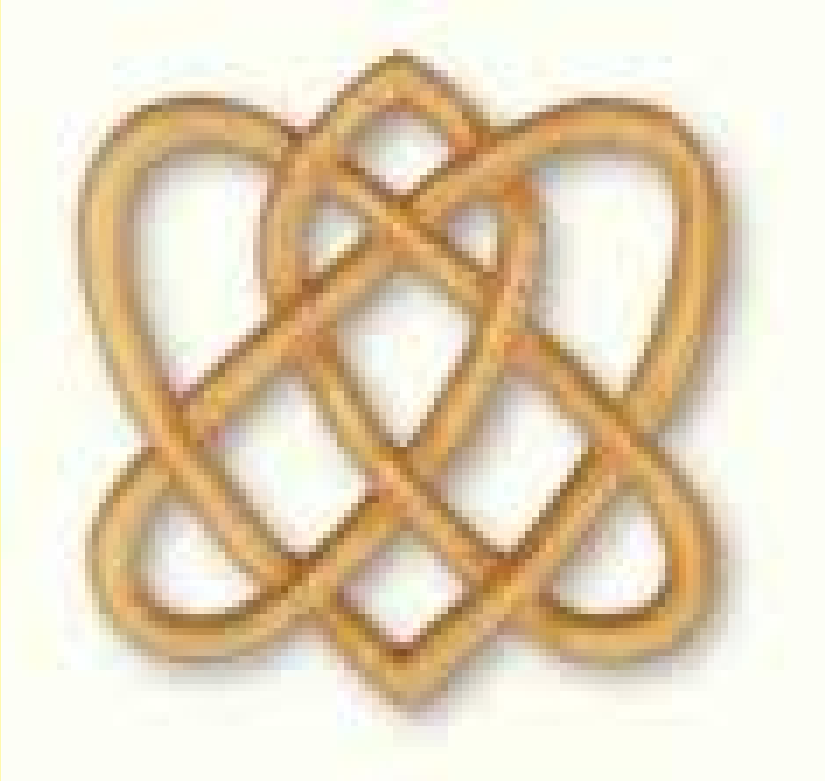
**Théorème Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi (1987)**

Si un diagramme de nœuds est alterné et sans croisement séparateur, alors on ne peut pas trouver de diagramme du même nœud avec moins de croisements.

# Revenons aux jolis exemples



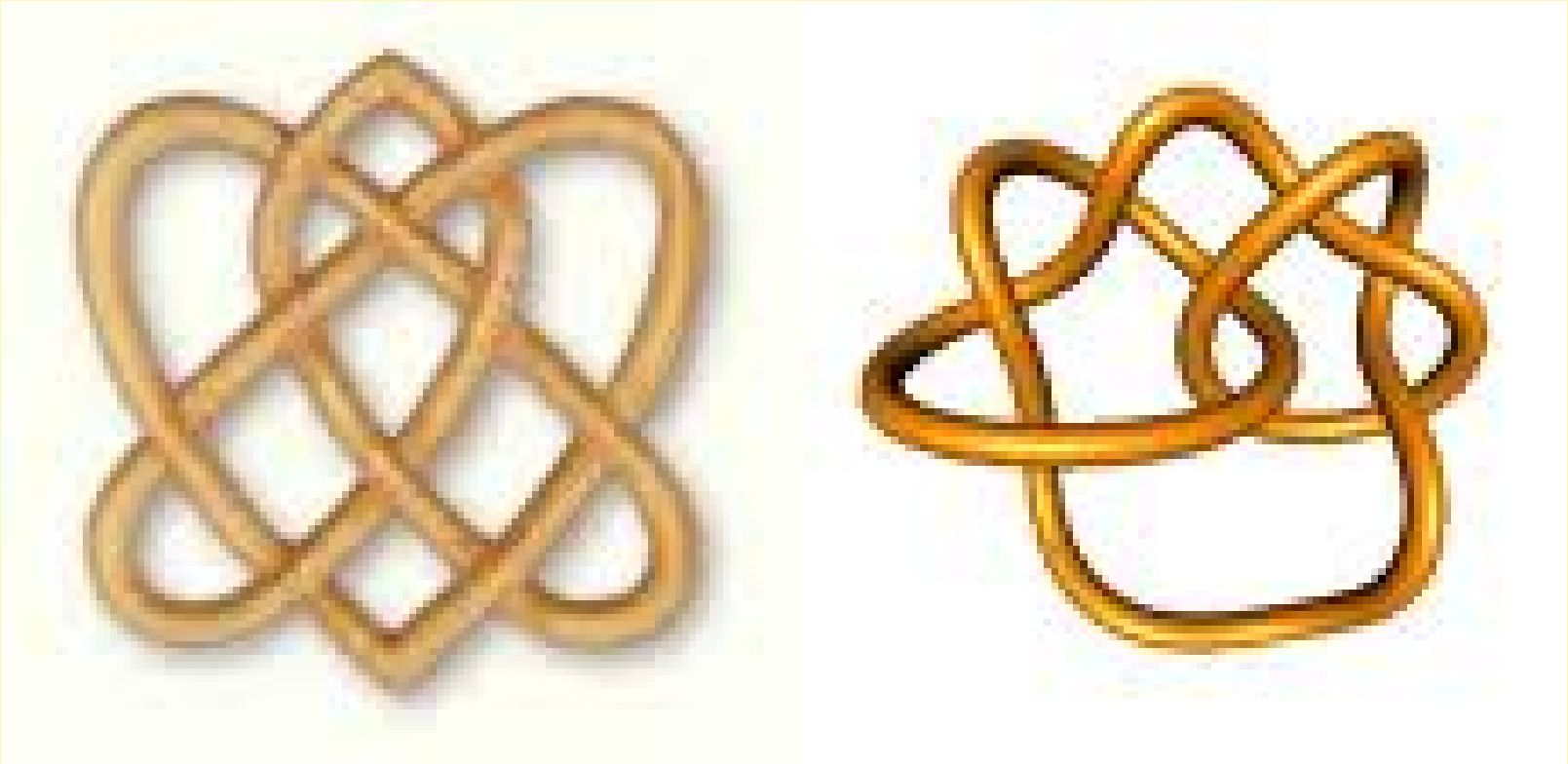
# Revenons aux jolis exemples



**Théorème de Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi (1987)**

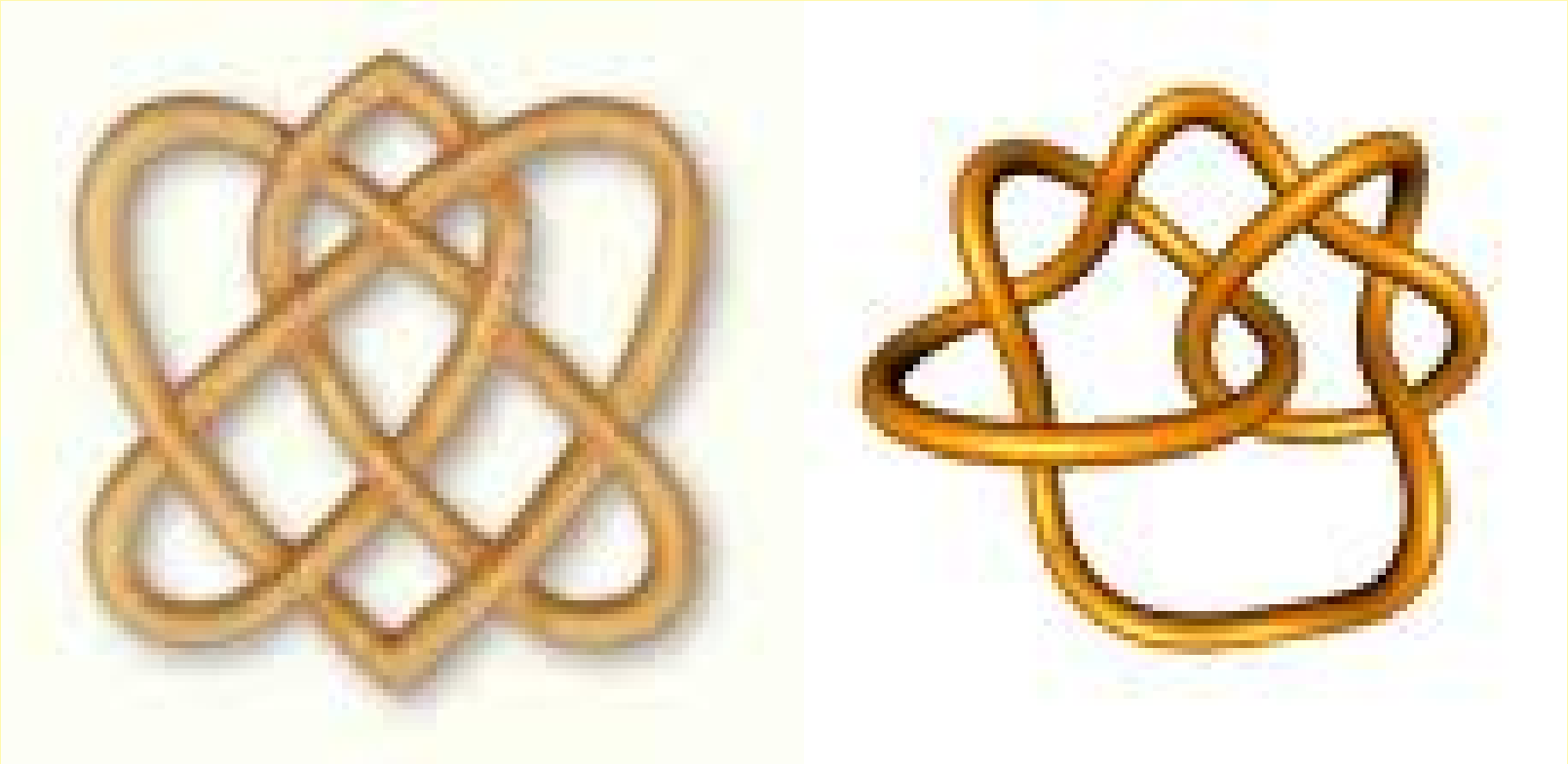
Si un diagramme de nœuds est alterné et sans croisement séparateur, alors on ne peut pas trouver de diagramme du même nœud avec moins de croisements.

# Revenons aux jolis exemples



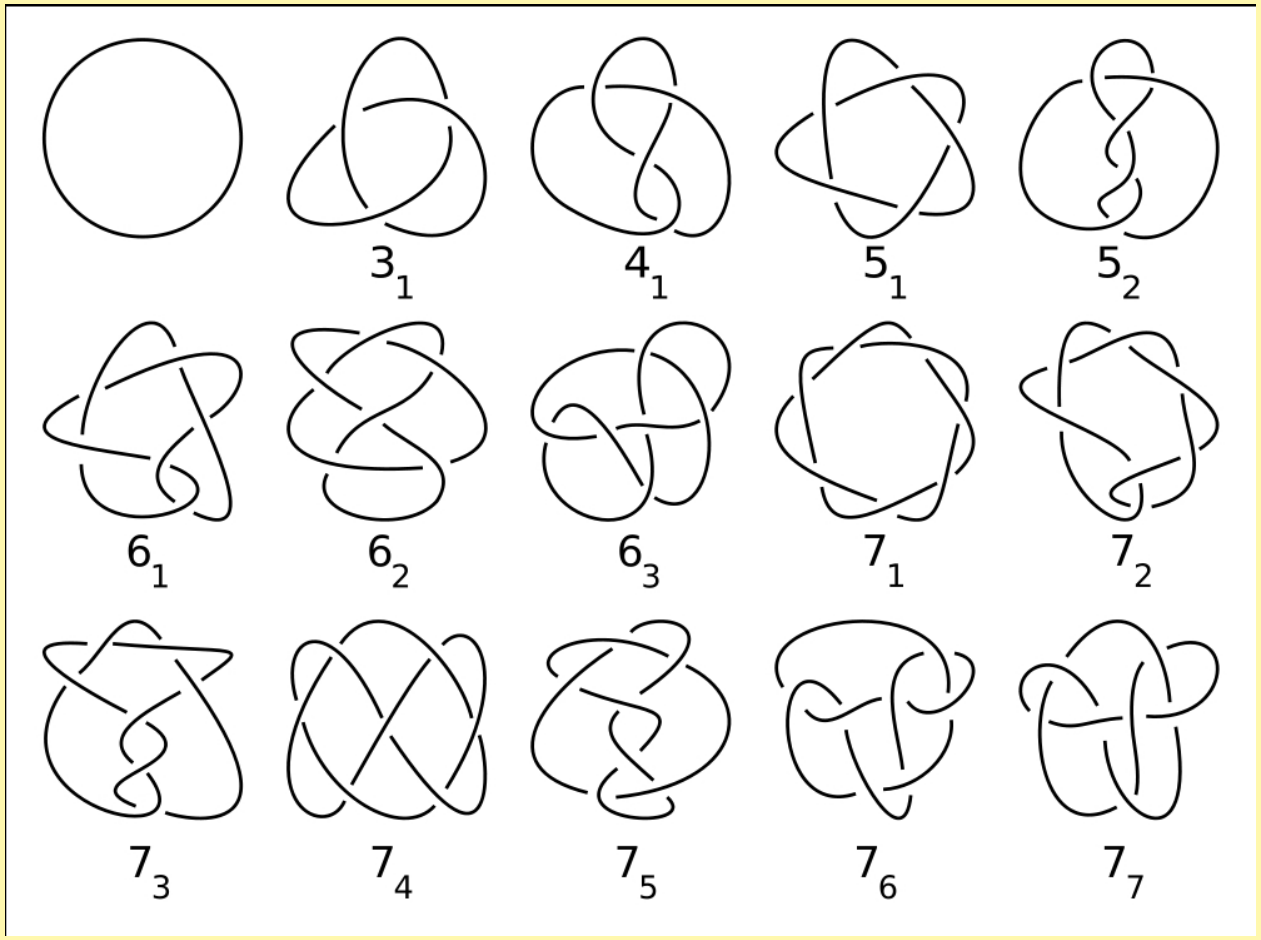
Ces deux nœuds sont distincts !

# Revenons aux jolis exemples

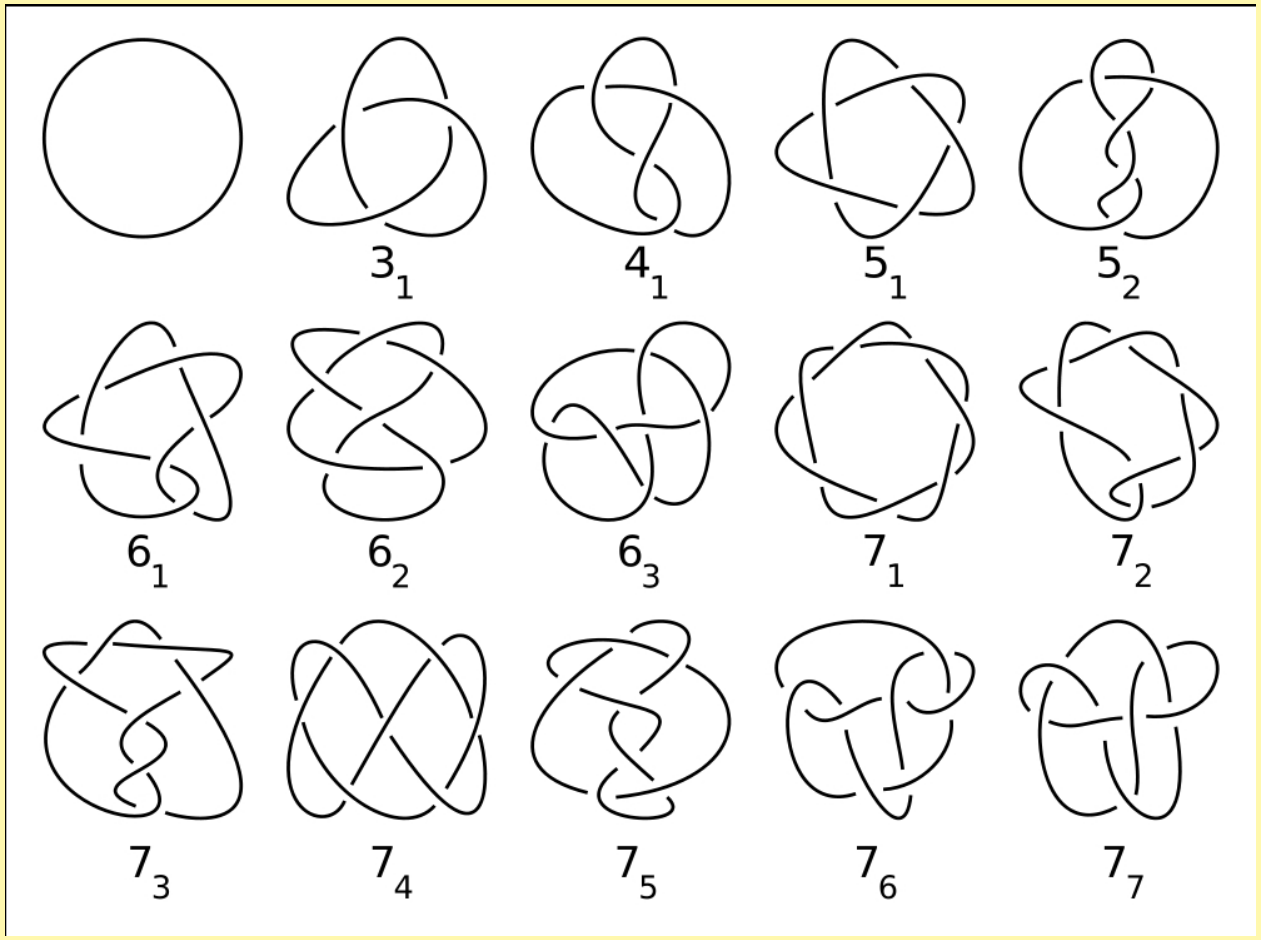


Ces deux nœuds sont distincts !
Celui de gauche ne peut pas être dessiné avec moins de dix croisements parce qu'il est alterné sans croisement séparateur.

# Les nœuds premiers jusqu'à 7 croisements



# Les nœuds premiers jusqu'à 7 croisements




Il y a 21 tels nœuds distincts avec 8 croisements, 49 avec 9 croisements, 165 avec 10..., 253293 avec 15.

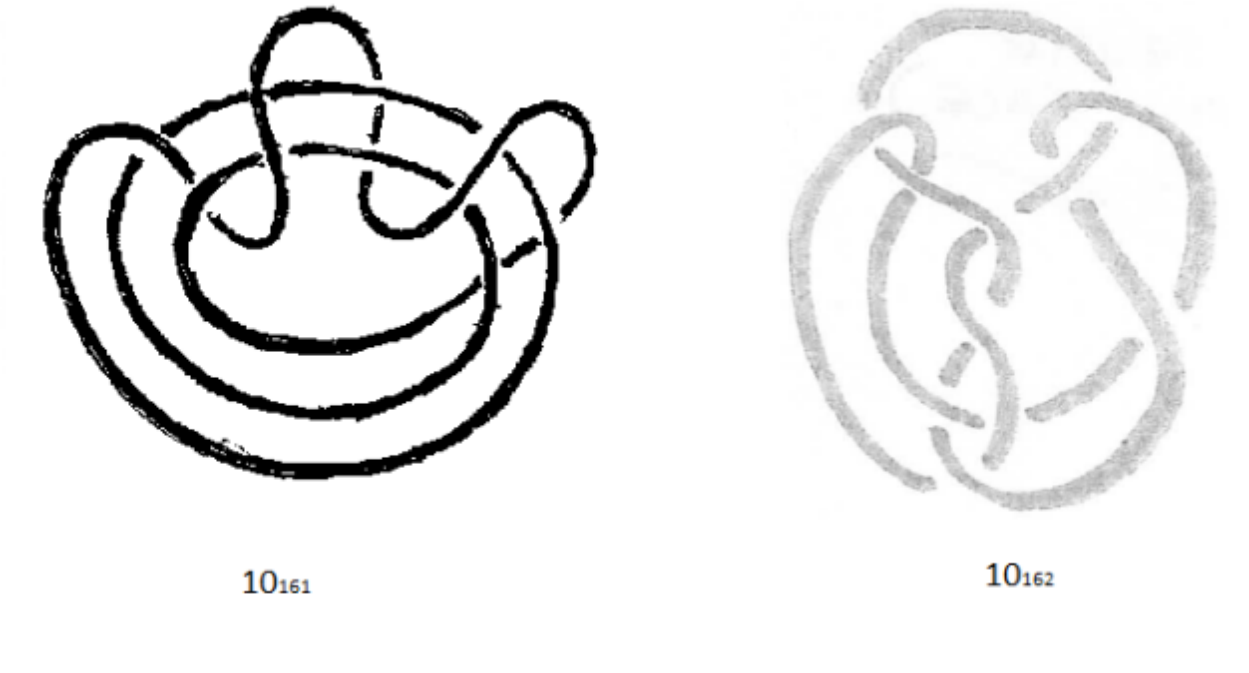
Il y a 21 tels nœuds distincts avec 8 croisements, 49 avec 9 croisements, 165 avec 10..., 253293 avec 15,

Il y a 21 tels nœuds distincts avec 8 croisements, 49 avec 9 croisements, 165 avec 10..., 253293 avec 15,

d'après Morwen Thistlethwaite , Jim Hoste and Jeff Weeks, 1997.

[ The first 1,701,936 knots, Math. Intelligencer 20 (1998), 33-48. ]

# La paire de Perko




Ces deux nœuds étaient considérés comme distincts jusqu'à ce que Perko prouvent qu'ils sont identiques en 1973.

(The picture above is due to Ken Perko. I thank him for warning me that I had included a wrong picture of his famous pair in an earlier version of these slides and I apologize for this mistake.)

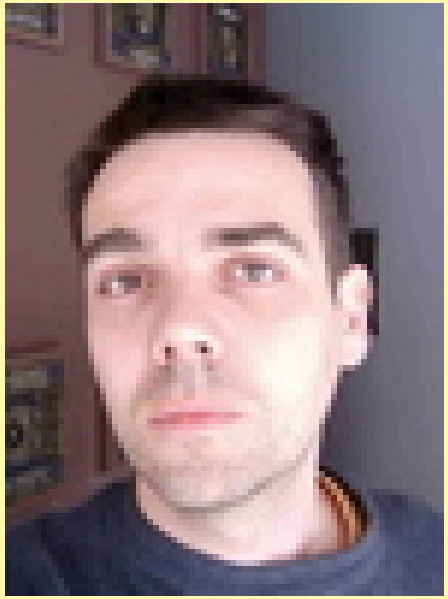
# Quelques contributeurs célèbres

Carl Friedrich Gauss
1777-1865

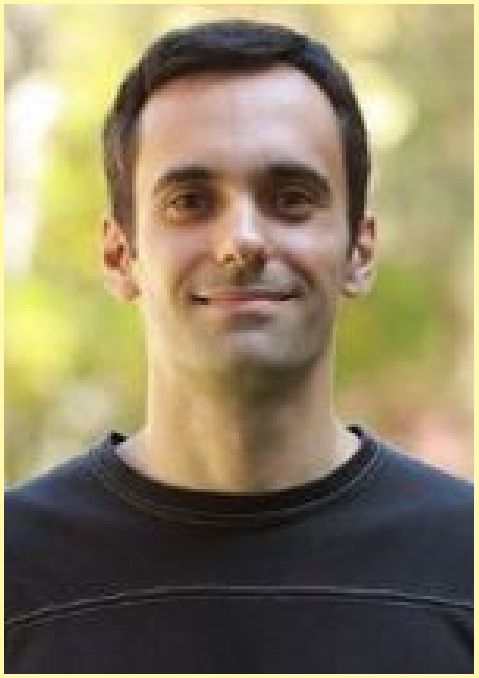
Kurt Reidemeister
1893-1971
(Photo, Oberwolfach, 1930)

# Quelques contributeurs célèbres modernes

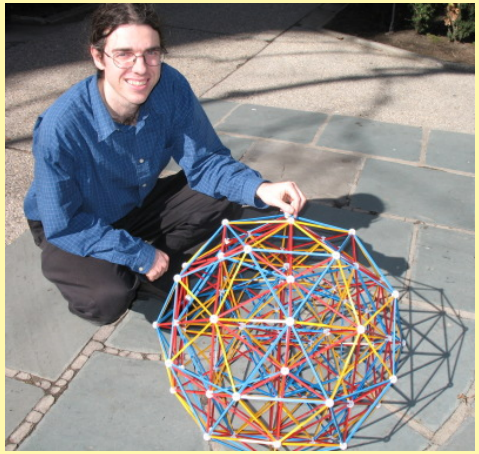
Peter Ozsváth
Yale University



Zoltán Szabó
Princeton



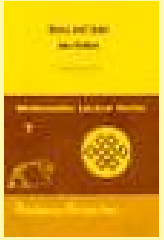
Ciprian Manolescu
Columbia University
1978-



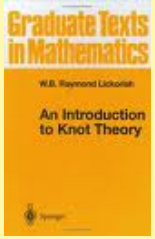
Dylan Thurston
Columbia University

En 2006, ils ont défini le premier invariant combinatoire capable de détecter le nœud trivial !

# Quelques références



Knots and links, by Dale Rolfsen




An introduction to knot theory,
by W. B. Raymond Lickorish

Page web de Dror Bar-Natan

http://www.math.toronto.edu/∼ drorbn/KAtlas/Knots/
http://www.knotplot.com/