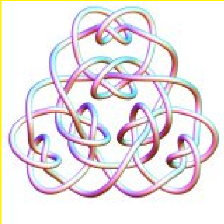
Nœuds en mathématiques

Christine Lescop

CNRS, Institut Fourier, Grenoble

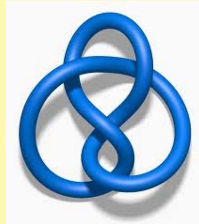


Grenoble, 11 décembre 2013

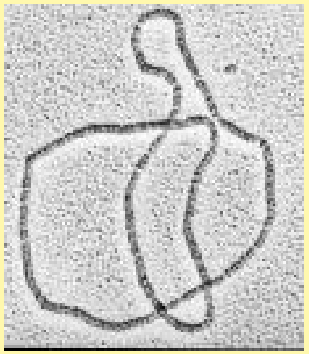
Nos premiers exemples

Le nœud de trèfle droit

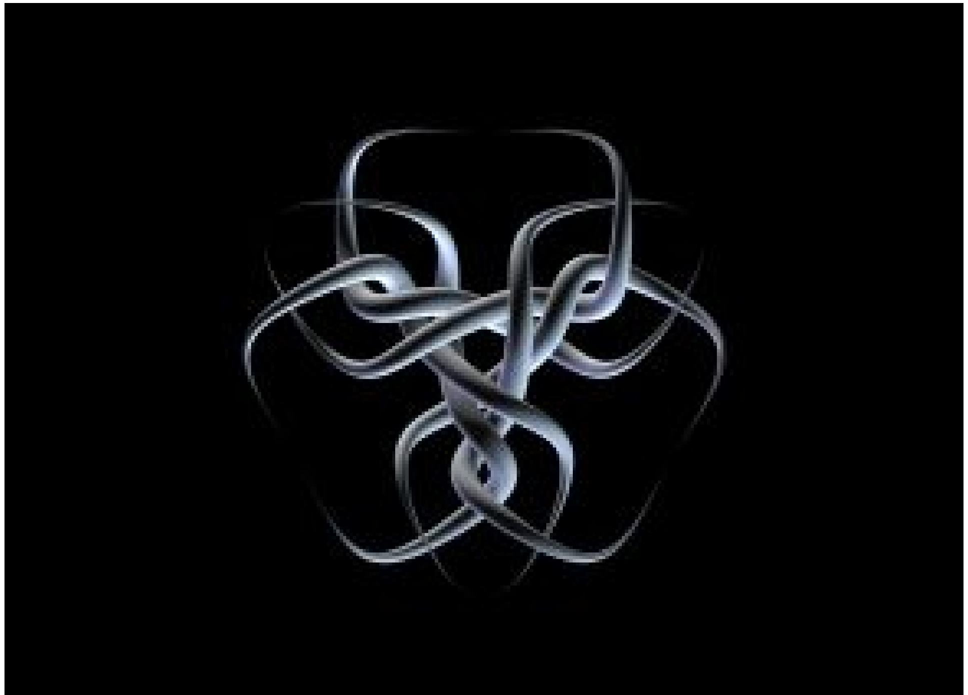
Le nœud en huit



Des nœuds dans notre ADN



Des exemples plus jolis



Un diagramme de nœud trivial

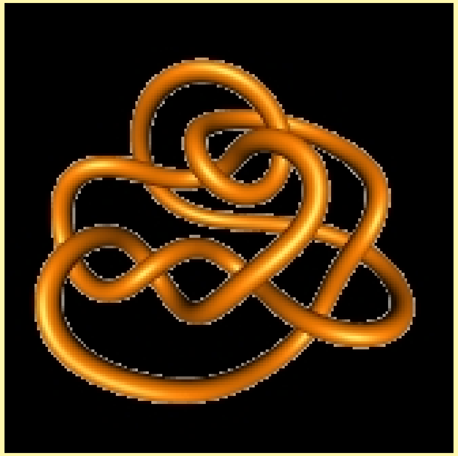
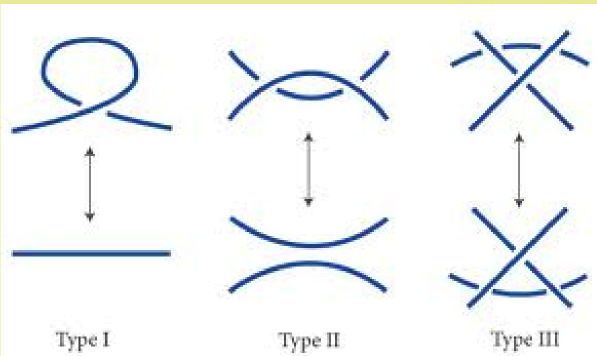


Image comme la plupart ici extraite de http://www.knotplot.com/

Le théorème de Reidemeister (1930)

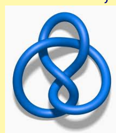
Théorème

Deux diagrammes (dessins de nœuds) représentent le même nœud si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements locaux d'un des trois types suivants :



Une conjecture de Tait (fin du 19ème siècle)]

Un diagramme est *alterné* lorsqu'en suivant le nœud, on passe alternativement dessus, dessous, dessus, dessous...

 et  sont alternés, mais pas  .

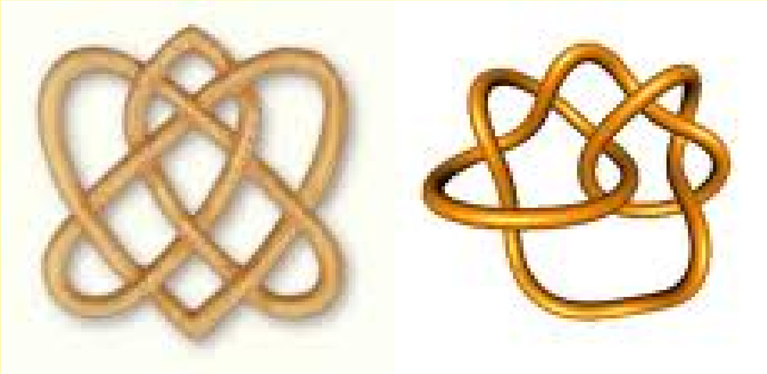
Un croisement est *séparateur* lorsqu'on peut tracer un cercle (éventuellement déformé mais pas coupé) qui ne rencontre le diagramme qu'en ce croisement.

 a 7 croisements séparateurs.  en a 3.

Théorème Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi (1987)

Si un diagramme de nœuds est alterné et sans croisement séparateur, alors on ne peut pas trouver de diagramme du même nœud avec moins de croisements.

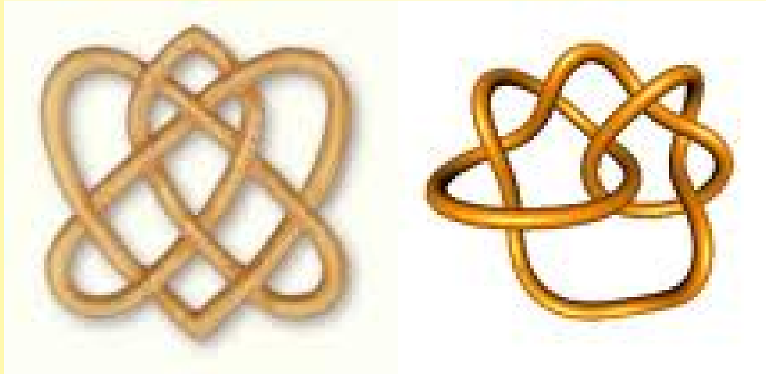
Revenons aux jolis exemples



Théorème de Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi (1987)

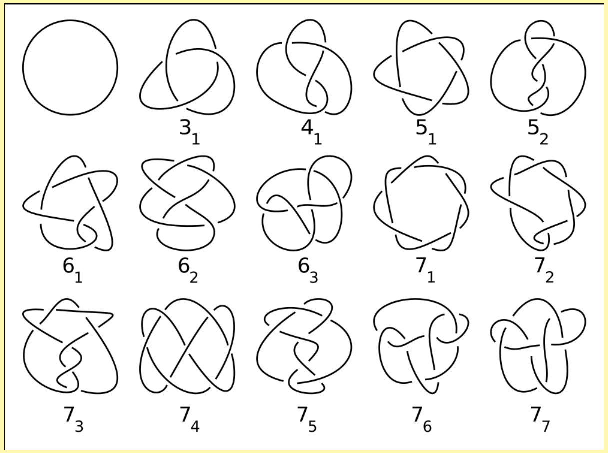
Si un diagramme de nœuds est alterné et sans croisement séparateur, alors on ne peut pas trouver de diagramme du même nœud avec moins de croisements.

Revenons aux jolis exemples



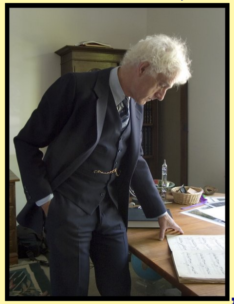
Ces deux nœuds sont distincts !
Celui de gauche ne peut pas être dessiné avec moins de dix croisements parce qu'il est alterné sans croisement séparateur.

Les nœuds premiers jusqu'à 7 croisements



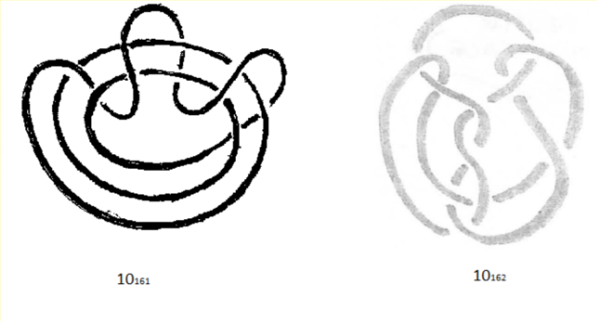
Il y a 21 tels nœuds distincts avec 8 croisements, 49 avec 9 croisements, 165 avec 10..., 253293 avec 15.

Il y a 21 tels nœuds distincts avec 8 croisements, 49 avec 9 croisements, 165 avec 10..., 253293 avec 15,

d'après Morwen Thistlethwaite , Jim Hoste and Jeff Weeks, 1997.

[The first 1,701,936 knots, Math. Intelligencer 20 (1998), 33-48.]

La paire de Perko



Ces deux nœuds étaient considérés comme distincts jusqu'à ce que Perko prouvent qu'ils sont identiques en 1973.

(The picture above is due to Ken Perko. I thank him for warning me that I had included a wrong picture of his famous pair in an earlier version of these slides and I apologize for this mistake.)

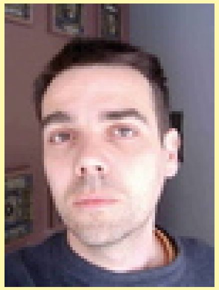
Quelques contributeurs célèbres

Carl Friedrich Gauss
1777-1865

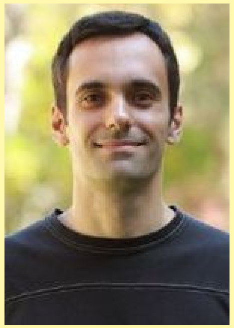
Kurt Reidemeister
1893-1971
(Photo, Oberwolfach, 1930)

Quelques contributeurs célèbres modernes

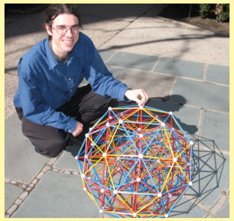
Peter Ozsváth
Yale University



Zoltán Szabó
Princeton



Ciprian Manolescu
Columbia
University
1978-

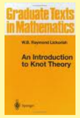


Dylan Thurston
Columbia
University

En 2006, ils ont défini le premier invariant combinatoire capable de détecter le nœud trivial !

Quelques références


Knots and links, by Dale Rolfsen



An introduction to knot theory, by W. B. Raymond Lickorish


Page web de Dror Bar-Natan


http://www.math.toronto.edu/∼ drorbn/KAtlas/Knots/
http://www.knotplot.com/