

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# **Serdica**

Bulgariacae mathematicae  
publicationes

---

# **Сердика**

Българско математическо  
списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or  
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.  
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or  
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Bulgariacae Mathematicae Publicationes  
and its new series Serdica Mathematical Journal  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>  
or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

## COURBURE ET CHANGEMENTS CONFORMES DE METRIQUE

VALENTIN BOJU, LOUIS FUNAR

Dans ce travail, on continue l'étude des transformations conformes de métrique, commencé dans [3].

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n, n \geq 2$   $g$  étant le champ tensoriel métrique et  $\tilde{g} = rg, r \in C^\infty, r > 0$ , un changement conforme du champ tensoriel métrique qui agit quasilinearément sur la courbure, c'est-à-dire

$$(1) \quad r\tilde{K}_\sigma = K_\sigma - 1/2 h, \quad h \in C^\infty, \quad \forall \sigma \in G_2(M),$$

$G_2(M)$  étant la variété de Grassmann de sections planes de  $M$ .

On sait que pour chaque champ vectoriel  $X, Y \in D^1(M)$  la connexion de Levi-Civita se transforme ainsi:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + 1/2 ((Xf)Y + (Yf)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } f),$$

où  $f = \log r$ . Il en résulte que le champ tensoriel de courbure vérifie la relation:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + 1/2 (h_f(X, Z)Y - h_f(Y, Z)X + \langle X, Z \rangle H_f Y \\ &\quad - \langle Y, Z \rangle H_f X) + 1/4 \left( \sum_{\text{cicl.}} ((Yf)(Zf) - \langle Y, Z \rangle \|\text{grad } f\|^2) X \right), \end{aligned}$$

où  $X, Y, Z \in D^1(M)$ ,  $h_f$  est la forme de Hesse et  $H_f$  est le tenseur de Hesse.

Choisissons un repère orthonormé pour la facette  $\sigma \in G_2(M)$ . Alors:

$$(2) \quad r\tilde{K}_\sigma = K_\sigma - 1/2 h_f(X, X) - 1/2 h_f(Y, Y) - 1/4 \|\text{grad } f\|^2 + (Xf/2)^2 + (Yf/2)^2,$$

donc la condition (1) est équivalente à la suivante:

$$(3) \quad h_f(X, X) + h_f(Y, Y) + 1/2 \|\text{grad } f\|^2 - 1/2 (Xf)^2 - 1/2 (Yf)^2 = h,$$

quel que soit le couple orthonormé  $(X, Y)$ . Si  $n = 2$ , cette condition s'écrit:

$$(4) \quad \Delta f = h,$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Beltrami-Laplace sur la variété  $M$ . En supposant  $M$  compact, du théorème de Fredholm il résulte que l'équation (3) a des solutions si et seulement si

$$\int_M h dV = 0,$$

$dV$  étant l'élément de volume sur l'espace  $(M, g)$ .

D'autre part, pour  $n \geq 3$  supposons que  $f$  n'a pas des points critiques dans un voisinage  $V \ni p, p \in M$ . Dans ces conditions, (3) nous donne

$$(5) \quad h_f(X, X) - 1/2 (Xf)^2 = w, \quad \forall X \in D^1(M),$$

*SERDICA, Bulgaricae mathematicae publicationes, Vol. 15, 1989, p. 187-191.*

où  $\omega = 1/2(h - 1/2 \|\text{grad } f\|^2)$  et le champ vectoriel unitaire

$$N = \text{grad } f / \|\text{grad } f\|$$

est défini dans le voisinage  $V$ . La relation (5) implique

$$(6) \quad \begin{aligned} \nabla_X \text{grad } f &= \omega X \quad \text{pour } \langle X, N \rangle = 0 \\ \nabla_N \text{grad } f &= (1/2 \|\text{grad } f\|^2 + \omega) N, \end{aligned}$$

donc

$$(6') \quad \begin{aligned} \nabla_X N &= \frac{\omega}{\|\text{grad } f\|} X - \frac{X(\|\text{grad } f\|)}{\|\text{grad } f\|} N, \quad \text{si } \langle X, N \rangle = 0 \\ \nabla_N N &= \frac{1/2 \|\text{grad } f\|^2 + \omega - N(\|\text{grad } f\|)}{\|\text{grad } f\|} N. \end{aligned}$$

La distribution  $N^\perp$  est involutive, et si  $\Omega \cap V$  est une hypersurface intégrale de la distribution  $N^\perp$ , alors est défini l'opérateur de Weingarten  $LX = \nabla_X N$ ;  $L$  est auto-adjoint, donc il admet  $(n-1)$  vecteurs propres  $X_i$ , orthogonaux, donc

$$\nabla_{X_i} N = r_i X_i, \quad r_i \in C^\infty, \quad i=1, \dots, n-1$$

et avec (6')

$$O = X_i(\|\text{grad } f\|) = \langle X_i, \text{grad}(\|\text{grad } f\|) \rangle,$$

d'où nous avons

$$(7) \quad \text{grad}(\|\text{grad } f\|) = v \text{grad } f, \quad v \in C^\infty.$$

Donc  $f$  est une fonction type-verseur (abrév.: FTV) ([2]).

Suivant [1, 2] et (6, 6'), on a

$$(8) \quad \nabla_X N = \frac{\omega}{\|\text{grad } f\|} X, \quad \langle X, N \rangle = 0,$$

$$(8') \quad \nabla_N N = 0,$$

$$(8'') \quad N(\|\text{grad } f\|) = 1/4 \|\text{grad } f\|^2 + 1/2 h^2.$$

Donc la fonction  $f$  est FTV ombilicale ([1, 2]). Réciproquement, soit  $f$  une FTV ombilicale (ayant les courbures principales associées égales  $k_1 = \dots = k_{n-1} = k$ ). Si nous nottons

$$N(\|\text{grad } f\|) - k \|\text{grad } f\| + 1/2 \|\text{grad } f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} R_f,$$

alors en considérant le changement conforme  $\tilde{g} = e^f g$ , nous avons

$$(9) \quad r \tilde{K}_\sigma - K_\sigma = h + \cos^2(N, \sigma) R_f,$$

où

$$h = 2k \|\text{grad } f\| - 1/2 \|\text{grad } f\|^2.$$

Donc, le changement conforme  $g = e^f g$  est quasilinear si et seulement si

$$(10) \quad R_f = 0.$$

**Théorème 1.** *Le changement conforme  $g = e^f g$  est quasilinéaire (avec  $f$  sans points critiques dans l'ouvert  $V \subset M$ ) si et seulement si  $f$  est une fonction type-verseur ombilicale qui vérifie (8') et (8'').*

**Remarque 1.** On peut améliorer le résultat au-dessus en montrant que la relation (9), où  $N = \text{grad } f / \|\text{grad } f\|$  implique aussi que  $f$  est une fonction type-verseur ombilicale.

Conformément aux résultats de [1, 2, 3], il résulte :

**Corollaire 1.** *Chaque composante connexe des hypersurfaces de niveau constant de la fonction  $f$  est sphérique. Les trajectoires du champ  $\text{grad } f$  sont, localement, des géodésiques paramétrisées naturellement. Pour chaque point  $p \in V$ , pour les facettes  $\sigma_1, \sigma_2 \subset M_p, \sigma_1 \cap \sigma_2 \ni \text{grad}_p f$ , on a :*

$$K_p(\sigma_1) = K_p(\sigma_2) = - \frac{\omega^2}{\|\text{grad } f\|^2} + N \left( \frac{\omega}{\|\text{grad } f\|} \right).$$

L'existence des fonctions type-verseur ombilicales, sans points critiques intérieurs sur  $M$ ,  $M$  une variété quelconque, est une question ouverte. Nous allons prouver que la condition plus forte  $R_f = 0$  diminue cette classe des fonctions, dans le cas quand  $M$  est une variété compacte à bord  $\partial M$ , et supposant que  $f$  vérifie une condition Neumann sur le bord  $\partial M$  :

$$(11) \quad V(f) = 0, \text{ où } V \text{ est la normale extérieure à } \partial M.$$

Les formules (8—8'') nous donnent

$$\Delta f = \frac{mh}{2} - \frac{m-2}{4} \|\text{grad } f\|^2$$

et, tenant compte de la formule de Green ([8]) et (11), nous avons

$$(11') \quad \int_M \left( \frac{mh}{2} - \frac{m-2}{4} \|\text{grad } f\|^2 \right) dV = 0,$$

où  $dV$  est l'élément de volume sur  $M$  : mais les conditions (11'),  $m \geq 3$  et  $h \leq 0$  sont incompatibles. Donc :

**Théorème 2.** *Sur une variété compacte à bord, il n'existent pas des fonctions  $r = e^f$  sans points critiques intérieurs, vérifiant une condition type Neumann sur le bord, et qui transforment la courbure quasilinéairement avec un facteur  $h \leq 0$ .*

Particulièrement, pour  $h = 0$ , la condition (1) est équivalente à  $\tilde{R} = R$ , où  $R$  est le tenseur de courbure [3, 10], donc

**Corollaire 2.** *Dans les conditions au-dessus mentionnées, il n'existent pas des changements conformes de métrique en conservant le tenseur de la courbure.*

Soit maintenant  $(U; \xi)$  une carte locale et  $\mathcal{J}_L$  la fonction

$$\mathcal{J}_L : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } J_L(p) = \frac{N(\omega(p))}{\|\text{grad } f\|^2} - 1/2 \omega(p) - \frac{\pi}{L^2}.$$

Dans la carte  $(U; \xi)$  choisie de sorte que  $N = \partial/\partial x^m$ , il résulte de la relation (5) que  $\omega = r\omega_1$ , où :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= c_2 e c_1 + 1/2 \left( \int_0^{t^m} (\|\text{grad } f\| \circ \xi^{-1})(t^1, \dots, t^{m-1}, \mu) d\mu \right) \circ \xi, \\ C_2 &= c_2(x^1, \dots, x^{m-1}), \quad c_1 = c_1(x^1, \dots, x^{m-1}), \\ r &= c_3 + \left( \int_0^{t^m} \left( \frac{\|\text{grad } f\| (\pi/L^2 + J_L)}{\omega_1} \right) \circ \xi^{-1}(t^1, \dots, t^{m-1}, \mu) d\mu \right) \circ \xi \end{aligned}$$

$$c_3 = c_3(x^1, \dots, x^{m-1}), \quad c_1, c_2, c_3 \in C^\infty(M).$$

La géodésique  $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$ , de longueur  $L = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ , est admissible si nous avons  $J_L(p) > 0$  pour tous points  $p$  situés sur la géodésique  $\gamma$ . Soit  $\gamma$  une des courbes intégrales de champ  $N$ ,  $p = \gamma(0)$ ,  $q = \gamma(1)$ .

**Théorème 3.** *Si  $\gamma$  est une géodésique admissible et  $\gamma(t)$  n'est pas conjugué à  $p = \gamma(0) \forall t \in (0, 1)$ , alors :*

- (i)  $p, q$  sont conjugués le long de  $\gamma$ ;
- (ii)  $\text{index}(p, q) = n - 1$ .

**Preuve.** Soit  $\{P_i\}_{i=1, \dots, n}$  une base orthonormée de champs de vecteurs parallèles le long de  $\gamma$ , ainsi que:  $\dot{\gamma} = LX_n$ , où  $X_n = P_n$ .

Soit  $\omega_a(t) = (\sin \pi t) P_a(t)$ ,  $a = 1, \dots, n-1$ . Rappelons que la fonction „énergie“  $E$  est égale à  $E_0$ , où

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt, \quad 0 \leq a < b \leq 1;$$

$\omega \in \Omega$ ,  $\Omega$  est l'ensemble des chemins différentiables par morceaux qui lient les points  $p$  et  $q$ .

Pour  $\gamma$  une géodésique et  $E_{**}: T\Omega_\gamma \times T\Omega_\gamma \rightarrow R$  la forme de Hesse de la fonction  $E$ , on sait ([9]) que

$$E_{**}(X, Y) = -2 \sum_t \langle Y(t), \Delta_t \frac{\nabla X}{dt} \rangle - 2 \int_0^1 \langle Y, \frac{\nabla^2 X}{dt^2} - R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} \rangle dt,$$

où  $\Delta_t$  est le saut en  $t$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} E_{**}(W_\alpha, W_\alpha) &= -2 \int_0^1 \langle W_\alpha, \frac{\nabla^2 W_\alpha}{dt^2} + R(W_\alpha, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle dt \\ &= 2 \int_0^1 \sin^2 \pi t (\pi^2 - L^2 R(P_\alpha \cdot N \circ \gamma, N \circ \gamma, P_\alpha)) dt = -2 \int_0^1 J_L(\gamma(t)) \sin^2 \pi t dt < 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{**}(W_\alpha, W_\beta) &= -2 \int_0^1 \langle W_\alpha, \frac{\nabla^2 W_\beta}{dt^2} + R(W_\beta, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle dt \\ &= -2 \int_0^1 \langle W_\beta, -\pi^2 \sin(\pi t) P_\alpha \rangle dt = -2 \int_0^1 L^2 \sin \pi t R(P_\alpha, N \circ \gamma, N \circ \gamma, P_\beta) dt = 0 \text{ de [2]}. \end{aligned}$$

On sait que la plus grande dimension d'un sous-espace de  $T\Omega_\gamma$ , pour lequel  $E_{**}$  est défini négatif, est l'index de  $E_{**}$ . Il en résulte que la dimension de l'espace des champs Jacobi qui s'annulent dans  $p$  et  $q$  est  $n-1$ , et les affirmations du théorème résultent immédiatement.

**Remarque 2.** En vertu de la remarque 1 et des relations (1), (9), il résulte que pour  $(M, g)$ , un espace à courbure quasi constante ([4]), les transformations conformes  $f$  qui donnent sur  $M$  une métrique d'espace euclidien ([7]) modifient la métrique

$$\tilde{g} = e'g,$$

où  $f$  est une fonction FTV ombilicale qui nous indique l'existence de telles fonctions FTV sur une variété à courbure QC. Un tel espace QC, compact et simplement connexe, est une sphère homologique si  $H, N > 0$  ([5]).

En général, il existe des fonctions FTV ayant localement (et même globalement) un point critique sur une variété à courbure négative ([5]).

Ces résultats complètent la théorie des fonctions FTV totalement non-ombilicales ([6]).

## BIBLIOGRAPHIE

1. V. Boju. La géométrie d'une fonction type-verseur. Actas del V Congreso Agrupacion Matematicos de Expresion Latina. Madrid, 1978, 292—296.
2. V. Boju. Une méthode d'utiliser l'opérateur gradient en géométrie Riemannienne. *Revue Roum. Math. Pures Appl.*, 32, 1978, 1297—1299.
3. V. Boju, M. Popescu. Changements conformes de métrique du point de vue global. *Atti Accad. Naz. Lincei*, 57, 1974, 346—349.
4. V. Boju, M. Popescu. Espaces à courbure quasi-constante. *J. Diff. Geometry*, 13, 1978, 373—383.
5. V. Boju, L. Funar. Géométrie de l'équation Hamilton — Jacobi et questions connexes. (à paraître).
6. V. Boju. Une expression canonique du tenseur Riemannien de courbure par rapport à une FTV. Proc. Nat. Conf. Geometry and Topology, 12. Univ. Bucharest, 1983, 46—49.
7. V. Boju, L. Funar. Espaces à courbure S—QC. *Serdica Bulg. Math. Publ.*, 9, 1983, 111—112.
8. I. Chavel. Eigenvalues in Riemannian Geometry. New York, 1984.
9. J. Milnor. Morse theory. Princeton, 1963.
10. K. Nomizu, K. Yano. Some results related to the equivalence problem in Riemannian geometry. *Math. Z.*, 97, 1967, 29—37.
11. B. Ruh. Conformally equivalent metrics with relations between their curvature tensors. EPF—Lausanne, 1983, 1—12.

Université de Craiova  
Craiova Roumanie

Reçue le 17. 08. 1988

Université de Bucarest  
Bucarest Roumanie