UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ
SEMINARUL DE GEOMETRIE „GH. VRÂNCEANU“

LUCRĂRILE CONFERINȚEI NAȚIONALE DE GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE

TÎRGOVIȘTE, 12–14 APRILIE 1986

EXTRAS

BUCUREȘTI 1988

Conferinţa Naţională
de Geometrie şi Topologie
Tîrgovişte, 12-14 aprilie 1986

O PROBLEMA DE MINIMAX IN GEOMETRIE

L. L. Funar

Printre cele mai dificile probleme ale geometriei combinatorice se numără cele de aranjare şi împachetare, respectiv de acoperire şi partiţionare. Ne vom ocupa mai jos de o problemă de tip Tammes stabilind legături cu alte rezultate privind geometria mulţimilor finite de puncte. Enunţul acesteia este relativ simplu: Pentru n fixat se cere să se estimeze raza minimă $r(d, n)$ a discursurilor din spaţiul euclidian d-dimensional E^d cu proprietatea că n discuri acoperă suprafaţa sferei unitate din E^d. Probleme de acest gen au fost studiate de Fejes Toth în monografia sa "Lagerungen in der Ebne auf der Kugel und im Raum", Springer Verlag 1972.

Considerăm $w(d, n)$ cel mai mic număr cu proprietatea că n discuri de rază $w(d, n)$ acoperă discul unitate din spaţiul euclidian E^d. Notăm S_d, D_d sfera respectiv discul din E^d de rază I şi fie U o sferă mare, d-I dimensională, frontiera unui disc D_{d-I}. Dacă discurile $F_I,\ldots,F_n$ de raze egale $r(d, n)$ acoperă S_d, proiecţia ortogonală $S_d \xrightarrow{p} D_{d-I}$, va face ca $p(F_I), \ldots, p(F_n)$ să acopere D_{d-I} prin urmare:

$$w(d-I, n) \leq r(d, n) \tag{1}$$

deoarece $p(F_i)$ reprezintă intersecţia unui disc d-I dimensional cu D_{d-I}, iar [illegible] $\supset p(F_i \cap S_d)$, deci:

$$\bigcup_{i=1}^{n} p(F_i) \supset \bigcup_{i=1}^{n} p(F_i \cap S_d) = p(S_d) = D_{d-I}$$

Considerăm n discuri egale $1/n^{1/d}$. Atunci volumul reuniunii lor este mai mic sau egal cu

$$n\,\gamma_d\,(n^{-1/d})^d = \gamma_d = \text{volum } (D_d)$$

Pentru $n > 1$ ţinînd cont că densitatea acoperirii spaţiului E^d cu discuri este mai mare strict ca 1 urmează că cele n discuri considerate nu vor acoperi D_d, aşadar:

$$w(d,\ n) > n^{-1/d} \tag{2}$$

şi conform relatiei (1) avem :

$$r(d,\ n) > n^{-1/(d-1)} \tag{3}$$

Pentru $d = 2$ se pot obţine estimări exacte

$$r(d,\ n) = \sin \frac{\pi}{n} \tag{3'}$$

Dacă vom pune în ipoteza problemei Tammes condiţia ca discurile să aibă centrele pe suprafaţa sferei S_d, noua caracteristică astfel obţinută $\tilde{r}(d,\ n)$ va satisface:

$$\tilde{r}(d,\ n) \geqslant r(d,\ n) \tag{4}$$

iar în cazul $d = 2$ se găseste imediat:

$$\tilde{r}(d,\ n) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Fie direcţiile $d_1, \dots, d_n$ în spatiul E^d şi să notăm

$$M(d_1, \dots, d_n) = \max\ \min \measuredangle (x,\ d_i) \tag{6}$$

Pentru a demonstra că

$$M(d_1, \dots, d_n) \geqslant m$$

este suficient să demonstrăm că există direcţii x astfel încît:

$$\min_i \measuredangle (x,\ d_i) \geqslant m$$

Mulţimea direcţiilor x cu proprietatea că $\measuredangle (x,\ d) < m$ este reuniunea a două conuri de unghiuri $2m$, pentru x, d conţinînd originea O. Transportînd prin paralelism directiile d_i în origine, conurile $C_i \cup C_i = \{x / O \in x,\ \measuredangle (x,\ d_i) < m\}$ vor acoperi E^d, dacă şi numai dacă

$$\bigcup_i C_i \cup C_i \quad \text{acoperă sfera unitate}$$

deci, cum $C_i \cap S_d$ este o calotă sferică de rază $2\sin(m/2)$, avem:

$$\tilde{r}(d,\ 2n) \leqslant 2\sin(m/2) \tag{7}$$

în caz contrar va exista o direcție $l \ni 0$, $l \notin \bigcup_i C_i \cup C_i$ adică:

$$\measuredangle(l,\ d_i) \geqslant m$$

Conform celor de mai sus avem:

<u>Propozitia 1.</u> Avem pentru $d \geqslant 2$, $n \geqslant 2$:

$$\min_{\{d_I,\dots,d_n\}} \max_x \min_i \measuredangle(x,\ d_i) = 2\arcsin \tfrac{1}{2}(r(d,n)) \tag{8}$$

Să considerăm acum o mulțime de direcții $(x_I,\dots,x_k)$ și

$$C(x_I,\dots,x_k) = \{(y_I,\dots,y_k) \ /\ \measuredangle(y_i,\ y_j) = \measuredangle(x_i,\ x_j),\ \forall\, i,j\}$$

Fie J_i izometria spațiului E^d cu proprietatea că $J_i x_i = x_i$, deci :

$$J_i y_I \parallel y_i \quad \forall\, i\ ,\ (y_I,\dots,y_k) \in C(x_I,\dots,x_k)$$

Rezultă:

$$\min_{\{d_I,\dots,d_n\}}\ \max_{(y_I,\dots,y_k) \in C(x_I,\dots,x_k)}\ \min_{i,j} \measuredangle(y_j,\ d_i) =$$

$$= \min_{\{d_I,\dots,d_n\}}\ \max_{y_I}\ \max_{i,j}\ \measuredangle(J_j y_I, d_i) = \min_{\{d_I,\dots,d_n\}}\ \max_{y_I}$$

$$\min_{i,j} \measuredangle(y_I, J_j^{-1} d_i) \geqslant \min_{\{e_I,\dots,e_{nk}\}}\ \max_{y_I}\ \min_i \measuredangle(y_I,\ e_i)$$

și conform propoziției 1 .

<u>Teorema 1.</u> Fie $n \geqslant 2$, $d \geqslant 2$, $k \geqslant I$, $x_I,\dots,x_k$ direcții fixate. Atunci

$$\min_{\{d_I,\dots,d_n\}}\ \max_{(y_I,\dots,y_k) \in C(x_I,\dots,x_k)}\ \min_{i,j} \measuredangle(y_i, d_j) \geqslant$$

$$\geqslant 2\arcsin \tfrac{1}{2}\,\tilde{r}(d,\ 2nk) \tag{9}$$

In continuare vom da două aplicații ale inegalității (9).

Fie $M = \{m_I,\dots,m_N\}$ o mulțime finită de puncte din E^d. Aceste N puncte generează maxim $\binom{N}{2}$ direcții distincte $m_i m_j$.

Conform teoremei există d direcții mutual ortogonale $x_I,\dots,x_d$ astfel ca:

$$\sphericalangle(m_i m_j, x_l) \geq 2 \arcsin \frac{1}{2} (\tilde{r}(d, dN(N-I))) , \forall i,j,l$$

Dacă M are diametrul I, deci $m_i m_j \leq I, \forall i,j$, atunci proiecțiile segmentelor $m_i m_j$ pe direcțiile x_l vor fi de lungime mai mică decît

$$\cos \sphericalangle(m_i m_j, x_l) \leq \cos 2 \arcsin \frac{1}{2} (\tilde{r}(d(dN(N-I))) = c \qquad (10)$$

Cum proiecția închiderii convexe a mulțimii M este închiderea convexă a proiecției urmează ca proiecția mulțimii M pe direcția x_l este inclusă într-un segment s_l de lungime c. Banda generată de segmentul s_l, $B_l = \{p / \exists q \in s_l, pq \perp x_l\}$ va include mulțimea M, deci:

$$M \subset \bigcap_{l=1}^{d} B_l = K$$

unde K este un hipercub de latură c, deoarece direcțiile x_j sînt ortogonale. Conform relațiilor (10), (3), (4), (5) rezultă:

<u>Teorema 2</u>. O mulțime de N puncte din spațiul E^d, de diametru egal cu I, poate fi acoperită cu un hipercub de latură $l_d(N)$ unde

$$l_2(N) \leq \cos(\pi/2N(N-I)) \qquad (11)$$

$$l_d(N) \leq I - I/2(dN(N-I))^{1/d-1} \qquad (11')$$

<u>Remarcă.</u> Estimarea (11) pentru $N = 3$ este exactă ([1]) Spre deosebire de rezultatul de mai sus teorema Jung nu admite o variantă separată în cazul mulțimilor finite.

Fie x_1, x_2, x_3 trei direcții care formează unghiuri $\frac{\pi}{3}$ între ele. Conform celor de mai sus există $x(y_1, y_2, y_3) \in \in C(x_1, x_2, x_3)$ astfel încît:

$$\min \sphericalangle(y_i, x_{jk}) \geq \pi / 3N(N-I))$$

unde $x_{jk} = m_j m_k$; urmează

$$M \subset \bigcap_{i=1}^{3} B_{y_i} = W$$

iar W este un hexagon semiregulat.

Hexagonul W este intersecția a două triunghiuri echilaterale de același centru, omotetice. Ducînd din centrul comun perpendiculare pe laturile cele mai mari (din două în două laturile hexagonului sînt egale) se obține o partiție a hexagonului W ca în figura 1 .

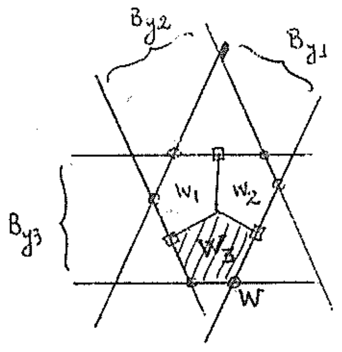

fig. 1.

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$$

și calculînd diametrul lui W_1 se obține:

<u>Teorema 3</u>. Fie M o mulțime finită de diametru I . Atunci există o partiție a lui $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ astfel ca

$$\operatorname{diam} M_i \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\pi}{3N(N-1)}$$

unde N este numărul de puncte al mulțimii M .

<u>Remarcă</u>. Rezultatul se păstrează cînd considerăm M o suprafață poligonală cu N vîrfuri, și reprezintă o îmbunătățire a rezultatelor cunoscute privind problema lui Borsuk.

<u>ABSTRACT</u>

From simple results on Tammes') s problem it follows the inequality

$$\min_{\{d_I,\dots,d_n\}} \max_{(y_I,\dots,y_k) \in O(x_I,\dots,x_k)} \min_{i,j} \measuredangle(y_i,d_j) \geqslant 2\arcsin \tfrac{1}{2}(r(d,2nk))$$

where x_i are given directions, $\measuredangle(y_i,y_j) = \measuredangle(x_i,x_j)$, d_j are arbitrary and $r(d, n)$ is defined as the least radius of n discks

with the centers on the unit sphere which covers it. From this it belongs two applications: First, is given an upper bound for $l_d(n)$ such every set $M \subset E^d$ consisting of n points, of diameter I can be enclosed in a cube of side $l_d(n)$. The second is an approach of BORSUK 's problem for finite sets.

BIBLIOGRAPHY

[1] Schwartz, B.L. - "Separating points in a rectangle" Math. Magasine 46 (1973) 62-70.

[2] Grunbaum, B., - "Borsuk 's problem and related questions" Proc. Sympos. Pure Math. v.7 (Convexity) Providence (USA) 1963, 271-284.