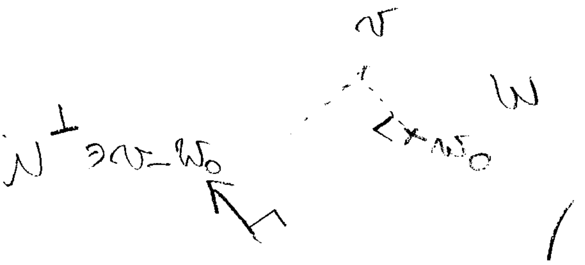
Proposition.

Soit $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espace pré-hilbertien (sur $\mathbb{R}$)
$W \subset V$ un sous-espace vectoriel de dim finie
Pour tout $v \in V$, il existe un unique $w_0 \in W$
t.q. $v - w_0 \in W^{\perp}$.

preuve :

- Unicité : si $v - w_0 \in W^{\perp}$ ($W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel)
  $v - w_1 \in W^{\perp}$
  alors $(v - w_0) - (v - w_1) =$
  $w_1 - w_0 \in W^{\perp} \cap W$.



donc $\langle w_1 - w_0, w_1 - w_0 \rangle = 0$
donc par le fait qu'on a un produit scalaire,
$w_1 - w_0 = 0$
càd $w_1 = w_0$

- Existence :

W admet une base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$
(prendre une base orthogonale, puis la normaliser).

on pose alors
$$w_0 = \sum_{j=1}^{r} \langle v, e_j \rangle e_j$$
alors pour tout k,
$$\langle v - w_0, e_k \rangle = \langle v, e_k \rangle - \langle w_0, e_k \rangle$$
$$= \langle v, e_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{r} \langle v, e_j \rangle e_j, e_k \right\rangle$$
$$= \langle v, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle$$

$$= \langle v, e_k \rangle - \langle v, e_k \rangle = 0.$$ cqfd

en d'autres termes, on a $\boxed{V = W \oplus W^{\perp}}$.

somme directe : tout $v \in V$ s'écrit $v = x + y$ avec $x \in W$, $y \in W^{\perp}$ et cette écriture est unique

Prop:

1) $V = W \oplus W^{\perp}$

2) l'appli $\pi_V : V \to W$ qui envoie v sur l'unique $w_0 \in W$ t.q. $v - w_0 \in W^{\perp}$ est une application linéaire

Déf: L'application $\pi_V : V \to W$ s'appelle la projection orthogonale de V sur W

On a vu la fois passée que $\pi_W(v)$ ~~réalise~~ est le point de W le plus proche de v (par la distance déduite ~~de~~ du produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$)

On parlera aussi de meilleure approximation de $v \in V$ par un élément de W

Note que

Si $v \in W$, alors $\pi_W(v) = v$.

Construction pratique d'une base orthonormée par un produit scalaire (en dim finie).

- On peut le faire par réduction de Gauss, on trouve une base orthogonale par $\langle \cdot , \cdot \rangle$, et on la normalise :

$$(f_1, \dots, f_r) \text{ t.q. } \langle f_j, f_k \rangle = 0 \text{ pour tout } j \neq k$$

f_j est non nul car élément d'une base

$\|f_j\| \neq 0$ car "définie positive".

$$e_j = \frac{f_j}{\|f_j\|}$$ reste une base, et

$$\|e_j\| = \frac{\|f_j\|}{\|f_j\|} = 1.$$

Mais il y a ~~plus rapide~~ : pr

- <u>procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt</u>

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base (pas forcément ON !) de W. On construit

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\tilde{v}_2 = e_2 - \langle e_2, v_1 \rangle v_1$$

$$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$$

$$\tilde{v}_3 = e_3 - \left(\langle e_3, v_1 \rangle v_1 + \langle e_3, v_2 \rangle v_2 \right)$$

proj. orthogonale de e_3 sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|}$$

$$\tilde{v}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1} \langle e_{k+1}, v_k \rangle v_k$$

$$v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}.$$

On voit facilement (récurrence)

que

- $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\} = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$ pour tout $k = 1, \dots, r$
- les v_j sont deux à deux orthogonaux, car

$$\tilde{v}_{k+1} = e_{k+1} - \Pi_{\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}}(e_{k+1})$$

- $\|v_k\| = 1$ pour tout k

donc $(v_1, \dots, v_n)$ est une base <u>orthonormée</u> de W.

Exemples.

(1) on considère le plan ~~[illegible]~~ d'équation $x+2y+3z=0$ dans $\mathbb{R}^3$ $\not I$

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+2y+3z=0\right\}.$$

Une base est donnée par

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

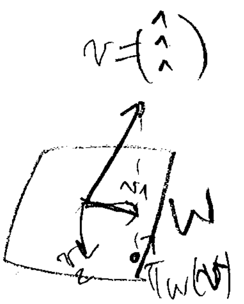
$$\|e_1\|=\sqrt{5},\quad \|e_2\|=\sqrt{10}$$

$$\langle e_1,e_2\rangle=6$$

$$v_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde v_2=e_2-\left\langle e_2,\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{6}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac35\\\frac65\\-1\end{pmatrix}=\frac15\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}.$$



$$v_2=\frac{\tilde v_2}{\|\tilde v_2\|}=\frac{\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{9+36+25}}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$$

$\{v_1,v_2\}$ est une base ON de W.

~~On cherche un point~~

$v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas dans W, on cherche le vecteur de

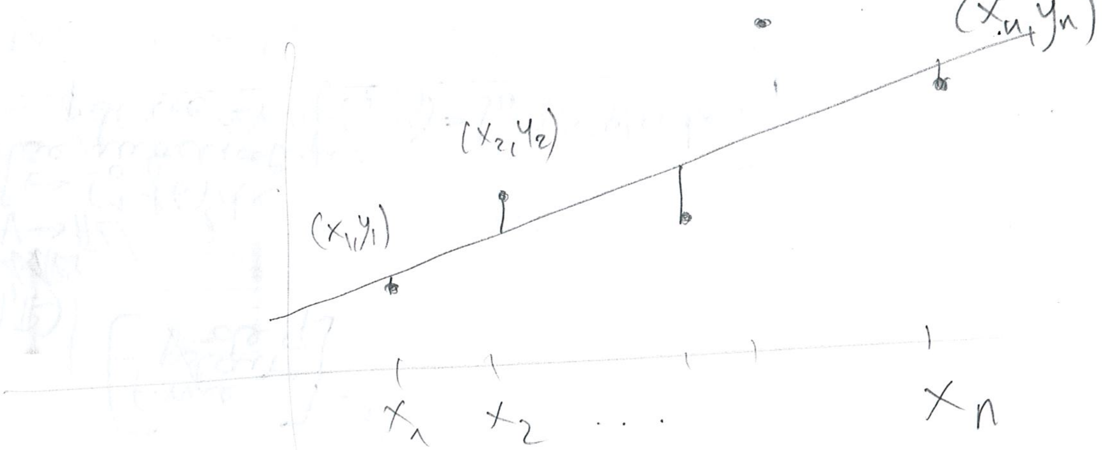
$$\pi_W(v)=\langle v,v_1\rangle v_1+\langle v,v_2\rangle v_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{70}} \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2/5\\-1/5\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{70} \begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

② droite des moindres carrés



on se donne n points dans le plan (x_j, y_j), on suppose les x_j distincts 2 à 2. correspondants à des mesures physiques, par lesquelles on veut tester si y_j est une fonction affine de x_j.

(erreurs de mesure → les observations ne donnent pas exactement une droite).

ex :

étant donnée une droite, disons d'équation

$$y = ax + b$$

~~on mesure la~~

donc les points d'abscisse x_j sur la droite sont

$$(x_j, ax_j + b).$$

On mesure l'"erreur quadratique" des mesures :

$$E(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - (ax_j + b)\right)^2.$$

$$= \| \underline{Y} - (a\underline{X} + b\underline{U}) \|^2$$

où $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\underline{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

et $\|\cdot\|$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $E(a,b)$ soit minimal,

pour trouver la droite qui "colle le mieux" aux données

(au sens des moindres carrés).

$W = \text{Vect}\{\underline{X}, \underline{U}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et on cherche à minimiser la distance de $\underline{Y}$ à un élément de W !

$\longrightarrow$ solution est donnée par la projection orthogonale de $\underline{Y}$ sur W !

$\boxed{\text{Fin du cours } 5/3/2020}$

$\pi_W(\underline{Y}) = ?$

~~on calcule la moyenne~~ $\cancel{\overline{x} = \frac{x_1+\dots+x_n}{n}}$ $\cancel{\overline{y} = \frac{y_1+\dots+y_n}{n}}$

$e_1 = \underline{U}$, $e_2 = \underline{X}$ base de W

$\rightarrow$ on applique Gram-Schmidt.

$$v_1 = \frac{\underline{U}}{\|\underline{U}\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \underline{X} - \langle \underline{X}, \tfrac{1}{\sqrt{n}} \underline{U} \rangle \tfrac{1}{\sqrt{n}} \underline{U}$$

$$= \underline{X} - \overline{x}\,\underline{U} = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} \\ \vdots \\ x_n - \overline{x} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \overline{x} = \text{moyenne des } x_j = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

$$\|\tilde{v}_2\|^2 = \|\underline{X} - \overline{x}\,\underline{U}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$$

(écart quadratique à la moyenne)

$$\pi_W(\underline{Y}) = \langle \underline{Y}, v_1 \rangle v_1 + \langle \underline{Y}, v_2 \rangle v_2$$

$$= \overline{y}\,\underline{U} + \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j (x_j - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} (\underline{X} - \overline{x}\,\underline{U}).$$

$\overline{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$

Note que $\sum_{j=1}^{n} (x_j y_j - y_j \overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - n\,\overline{x}\,\overline{y} = \sum_{j=1}^{n} (x_j y_j - \overline{x}\,\overline{y})$.

~~On trouve~~

$$\Pi_W(\underline{Y}) = \bar{y}\,\underline{U} + \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j y_j - \bar{x}\bar{y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\left(\underline{X} - \bar{x}\,\underline{U}\right)$$

$$= \frac{\sum(x_j y_j - \bar{x}\bar{y})}{\sum(x_j-\bar{x})^2}\,\underline{X}$$

$$+ \left(\bar{y} + \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j y_j - \bar{x}\bar{y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\,\bar{x}\right)\underline{U}.$$

donc la droite des moindres carrés pour coeff directeur

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}(x_j y_j - \bar{x}\bar{y})}{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2} \\[2ex] b = \bar{y} + \dfrac{\sum(x_j y_j - \bar{x}\bar{y})}{\sum(x_j-\bar{x})^2}\,\bar{x}\end{cases}$$