Applications aux EDP = Equations aux Dérivées Partielles

On traitera uniquement le cas de l'équation de la chaleur (pour un autre exemple, voir le poly en particulier le chapitre sur l'équation des ondes).

Il ressort de travaux de Fourier que la fonction de deux variables $T(x,t)$, $x \in [0,L]$, $t \geq 0$ qui décrit la température d'une barre de métal homogène de longueur L ($T(x,t)$ = température au point d'abscisse x au temps t) satisfait une équation de la forme

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad (*)$$

pour une constante $D > 0$ (caractéristique du métal).

(*) s'appelle l'équation de la chaleur

On espère qu'étant donné le profil de température de la barre à l'instant initial ($t=0$), on puisse déduire la température à tout instant $t > 0$.

Pour que ce soit le cas, on doit imposer des conditions supplémentaires, de préférence en lien avec des hypothèses liées à la physique, qui permettent d'obtenir un "problème bien posé", c'est-à-dire pour lequel on a existence et unicité de la solution.

Exemple: on se donne une fonction $\varphi : [0,L] \to \mathbb{R}$ et on cherche à résoudre

$$\begin{array}{ll} (EC) \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial T}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{sur } [0,L] \times \mathbb{R}_+ \\ T(x,0) = \varphi(x) & \text{pour tout } x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \end{array} \right. \\ \text{condition initiale (CI)} & \\ \text{condition aux bords (CB)} \rightarrow & \end{array}$$

rappel: (EC) et (CB) sont linéaires:

si $T_1(x,t)$ et $T_2(x,t)$ satisfont (EC) et (CB)

et si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ satisfait aussi (EC) et (CB).

idée naïve: deviner des solutions simples de (EC) et (CB) et en faire des combinaisons linéaires pour satisfaire (CI).

Pour deviner des solutions, une technique de base est la technique de séparation des variables:

on cherche $T(x,t)$ sous la forme d'un produit de fonctions d'une variable:

$$T(x,t) = f(x)\, g(t).$$

Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = f(x)\, g'(t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = f''(x)\, g(t)$$

donc on veut f, g telles que (pour tous x, t),

$$f(x)\, g'(t) = D\, f''(x)\, g(t)$$

Si f ne s'annule pas, c'est équivalent à

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{D} \frac{g'(t)}{g(t)}$$

ne dépend que de x — ne dépend que de t

$\rightarrow$ ces deux fonctions sont constantes

notons α cette constante.

On veut que les (CB) soient satisfaites, donc on demande $f'(0) = f'(L) = 0$.

Les solutions de $\frac{f''(x)}{f(x)} = \alpha \iff f''(x) = \alpha f(x)$

Sont de la forme

$f(x) = a e^{\sqrt{\alpha} x} + b e^{-\sqrt{\alpha} x}$ si $\alpha > 0$

$f(x) = a + bx$ si $\alpha = 0$

$f(x) = a \cos(\sqrt{-\alpha} x) + b \sin(\sqrt{-\alpha} x)$ si $\alpha < 0$

pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha \geq 0$, les conditions $f'(0) = f'(L) = 0$ impliquent que $f = 0$ ($t \times 0$), ce qui n'est pas intéressant, ça donnerait une solution évidente $T(x,t) = 0$!

On prend donc $\alpha < 0$, disons $\alpha = -\omega^2$ pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$,

$f'(x) = -a\omega \sin(\omega x) + b\omega \cos(\omega x)$

on veut $0 = f'(0) = b\omega$, donc on prend $b = 0$,

ce qui donne $f'(x) = -a\omega \sin(\omega x)$

comme on veut $0 = f'(L) = -a\omega \sin(\omega L)$,

(et on ne veut pas prendre $a = 0$, sinon on retrouve $T(x,t) = 0$)

on prend $\omega_{\neq 0}$ tel que $\sin(\omega L) = 0$

càd $\omega L = n\pi$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Comme $\alpha = -\omega^2$, ceci revient à prendre $\boxed{\alpha = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}}$

et $f(x) = \cos(\frac{n\pi}{L} x)$, convient.

On veut aussi $\frac{1}{D}\frac{g'(t)}{g(t)} = \alpha$, donc g doit être solution de

$$g'(t) = D\alpha g(t)$$

toujours avec $\alpha = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$,

càd. $g(t) = C\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$

> Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction
> $$T_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$$
> est une solution de (EC) et (CB).

Par linéarité, ceci permet de résoudre les conditions initiales (CI) pour certains choix particuliers de $\varphi(x)$, à savoir:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \ldots + a_N\cos\left(N\frac{\pi}{L}x\right)$$

il suffit de prendre

$$T(x,t) = a_0 + a_1 T_1(x,t) + a_2 T_2(x,t) + \ldots + a_N T_N(x,t),$$

(note que $T_0(x,t) = 1$) puisque $T_n(x,0) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$!

On a vu que toute fonction (suffisamment régulière) $\varphi : [0,L] \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une série de la forme

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

(on prend a_n = les coefficients de Fourier de l'extension ~~x~~ paire de φ à $[-L,L]$)

Donc si on veut résoudre (EC), (CB) et (CI) avec φ "quelconque", on a envie de prendre

$$T(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt}$$

avec a_n = les coefficients de Fourier de la série **cos** de φ.

Questions: 1) c'est bien défini ?

2) ça donne une solution du problème

3) c'est la seule solution ?

1) On sait que $T(x,0)$ est bien définie par le théorème de Dirichlet, si φ est C^1 par morceaux et continue (et si $\varphi'(L)=0$, pour que l'extension (2L)-périodique de l'extension impaire de φ soit C^1 ...)

pour $t>0$, la convergence est plus facile grâce au facteur exponentielle négative, mais cela demande un peu de travail.

idée: par Parseval, $a_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc (a_n) est bornée, disons $|a_n| \leq M$

pour $t \geq \varepsilon$, $0 \leq \left|a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\right| \leq M e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}\varepsilon}$

et $\left(\sum_{n\geq 1} e^{-an^2}\right)$ converge pour tout $a>0$ $(\varepsilon>0)$

2) est subtil ! on voudrait pouvoir généraliser la propriété de linéarité de (EC), (CB) en remplaçant les combinaison linéaire par des sommes infinies (convergentes).

on veut savoir si

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\right) = \qquad (*)$$

[on voudrait intervertir la dérivation et la série]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\right)$$

(et de même a-t-on $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$?)

Attention : en général, la somme d'une série dont tous les termes sont dérivables n'est pas forcément dérivable
(exemple : la série de Fourier de $|x|$ sur $[-\pi,\pi]$).

avec des hypothèses supplémentaires sur φ (par exemple φ est C^2), on obtient des théorèmes d'interversion dérivée/série qui valident (*)

→ on justifie 2) pour (EC) et (CB).
pour (CI) c'est plus facile, car pour $t=0$
on a $T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}D\cdot 0}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$= \varphi(x)$
par Dirichlet.

Idée de preuve de 3) :
on considère l'"énergie" en fonction du temps

$$J(t) = \frac{1}{2D}\int_0^L T(x,t)^2\, dx \qquad (t>0).$$

(si on peut dériver sous le signe $\int_0^L$), on a

$$J'(t) = \frac{1}{D}\int_0^L T(x,t)\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\, dx$$

$$= \int_0^L T(x,t)\, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\, dx$$

$$\underset{\substack{\text{intégration}\\ \text{par parties}\\ \text{(et (CB))}}}{=} - \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \leq 0$$

donc J décroit avec t !

Si T_1 et T_2 sont deux solutions de

$$\begin{cases} (EC) & \dfrac{\partial T}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ (CB) & \dfrac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \\ (CI) & T(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Alors $T = T_1 - T_2$ est solution de

(EC)

(CB)

et (CI) $T(x,0) = 0$

mais alors $J(0) = 0$

et comme J décroit, $J(t) \geq 0$ pour tout t, on a

$J(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$

càd $T(x,t) = 0$ pour tout t

càd $T_1 = T_2$

Ceci donne l'unicité.

$$\boxed{\text{Enoncé précis avec hypothèses : voir poly}}$$