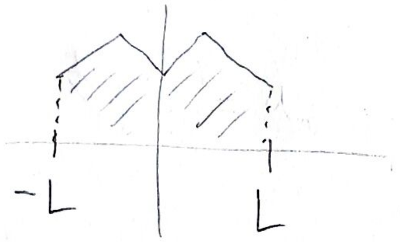
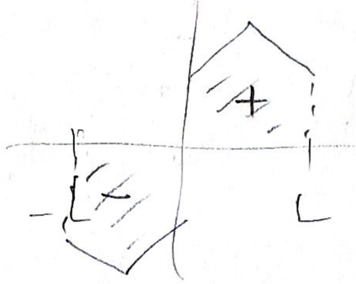
Utilisation de la symétrie / parité.

Soit $L>0$ et $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.

1) Si f est paire, alors $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$

2) Si f est impaire, alors $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.





preuve : 1) $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_0^L f(x)\,dx$

$= \int_L^0 f(-y)(-dy) + \int_0^L f(x)\,dx$

chgt de variable $y=-x$ dans la 1ère intégrale

$\underset{f \text{ est paire}}{=} -\int_L^0 f(y)\,dy + \int_0^L f(x)\,dx$

$= \int_0^L f(y)\,dy + \int_0^L f(x)\,dx$

$= 2\int_0^L f(y)\,dy$

2) $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = -\int_L^0 f(-y)\,dy + \int_0^L f(x)\,dx$

$\underset{f \text{ est impaire}}{=} \int_L^0 f(y)\,dy + \int_0^L f(x)\,dx$

$= -\int_0^L f(y)\,dy + \int_0^L f(x)\,dx = 0$. CQFD.

Conséquence.

Prop : Soient a_k, b_k les coefficients de Fourier sur $[-L,L]$ de $f\in C^0_{mor}([-L,L],\mathbb{R})$.

$\cos(\frac{k\pi}{L}x)$ $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$

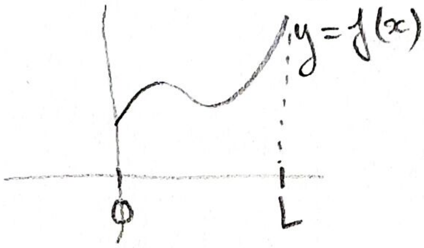
1) Si f est paire, alors $b_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

2) Si f est impaire, alors $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

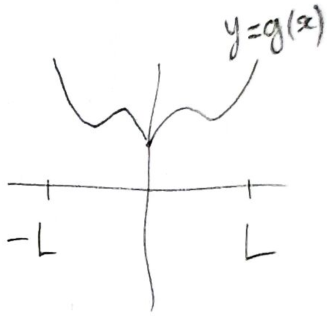
Variantes des séries de Fourier.

1) Séries sin/cos sur $[0,L]$.

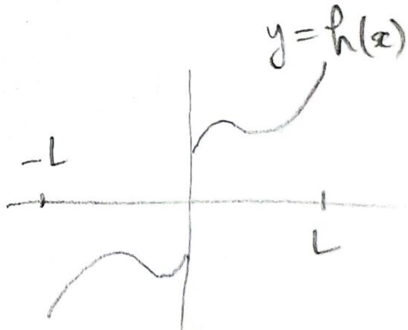
On se donne $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, qu'on étend de deux façons à $[-L,L]$



extension paire :
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,L] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-L,0[\end{cases}$$



extension impaire :
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,L[\\ -f(-x) & \text{si } x \in [-L,0[\end{cases}$$



note que g et h sont alors continues par morceaux.

On a vu la fois passée que

* la série de Fourier $S(g)$ n'a pas de termes en $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$, càd $b_k(g) = 0$
* La série de Fourier $S(h)$ n'a pas de termes en $\cos(\frac{k\pi}{L}x)$, càd. $a_k(h) = 0$.

On appelle $S(g)(x)$ la <u>série en cosinus</u> de f sur $[0,L]$
$S(h)(x)$ la <u>série en sinus</u> de f sur $[0,L]$

Par exemple, pour $f(x) = x$ sur $[0,\pi]$, on obtient

$g(x) = |x|$ sur $[-\pi,\pi]$ (extension paire)

$h(x) = x$ sur $[-\pi,\pi]$ (extension impaire)

On a vu que $S(h)(x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx)$

Par le théorème de Dirichlet, $S(h)(x)$ converge, et on a pour tout $x \in [0,L]$

$$\boxed{2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\Big(\overset{k}{\cancel{\tfrac{k\pi}{L}}}\, x\Big) = x}$$

Pour $S(g)(x)$, on calcule

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx \overset{\text{(symétrie)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}.$$

$(k>0)$
$$a_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx$$
$$\underset{\text{(symétrie)}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx$$
$$\underset{|x| = x \text{ pour tout } x\in[0,\pi].}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\cos(kx)}_{v'}\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k}\,dx + \left[x\,\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $S(g)(x)$ est donnée par

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

Par Dirichlet, on a aussi que cette série converge, et

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) = x}$$

pour tout $x \in [0,\pi]$.

2) Coefficients de Fourier exponentiels c_k, $k \in \mathbb{Z}$.

pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, la notion la plus importante (au moins pour la physique) n'est pas celle de forme bilinéaire, mais celle de forme hermitienne.

Déf: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$
$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme hermitienne si

- φ est linéaire par rapport à sa première variable, càd.

$$\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(\lambda v, w) = \lambda \varphi(v, w)$$
pour tous $v, v_1, v_2, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

- $\varphi(w,v) = \overline{\varphi(v,w)}$ pour tous $v, w \in V$

Il découle de cette définition que
$$\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2)$$
pour tous $v, w_1, w_2 \in V$

mais attention, si $v, w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\varphi(v, \lambda w) = \bar{\lambda}\, \varphi(v, w)$$
(on dit parfois que φ est anti-linéaire par rapport à sa deuxième variable)

Exemples :

1) Sur $\mathbb{C}^n$, la forme hermitienne standard est définie par

$$\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \longmapsto v_1 \overline{w_1} + \dots + v_n \overline{w_n}.$$

2) Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne, càd.

$${}^tM = \overline{M} \iff$$ les composantes (j,k) et (k,j) sont des complexes conjugués,

alors la formule

$$\varphi(X,Y) = {}^tX M \overline{Y}$$

définit un produit hermitien sur $\mathbb{C}^n$

$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$

3) $V = C^0([a,b], \mathbb{C})$

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi(f,g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

définit une forme hermitienne.

4) toute FBS $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ qui prend des valeurs réelles (càd $\varphi(v,w) \in \mathbb{R}$ pour tous $v, w \in V$) est hermitienne

Si $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ est hermitienne, on a pour tout $v \in V$, $\varphi(v,v) = \overline{\varphi(v,v)}$

càd $\varphi(v,v) \in \mathbb{R}$.

On note $q_\varphi : V \to \mathbb{R}$ la fonction correspondante. C'est une forme quadratique sur $V_{\mathbb{R}} = V$ vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (sa forme polaire est la partie réelle de φ).

→ on peut lui appliquer la réduction de Gauss, parler de sa signature, etc.

Déf : φ est un produit scalaire hermitien si q_φ est un produit scalaire sur $V_{\mathbb{R}}$.

ex : $\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ définit un produit scalaire hermitien sur $V = C^0([a,b],\mathbb{C})$.

Pour les produits scalaires hermitiens, on note souvent $\langle v, w\rangle = \varphi(v,w)$

$\|v\|^2 = \varphi(v,v) = q_\varphi(v)$

(comme dans le cas réel).

Pour $V = C^0([-L,L],\mathbb{C})$ les fonctions $\cos(\frac{k\pi}{L}x)$ et $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$ forment toujours une famille orthogonale par le produit scalaire hermitien.

On voudrait utiliser une famille orthogonale différente, en utilisant des exponentielles complexes $e^{\frac{k\pi i}{L}x}$ $(k\in\mathbb{Z})$

C'est naturel, car $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

pour tout $\theta\in\mathbb{R}$

Prop : la famille $\{e^{\frac{k\pi i x}{L}}, k\in\mathbb{Z}\}$ est orthogonale par le produit scalaire hermitien sur $V = C^0([-L,L],\mathbb{C})$

preuve : $\displaystyle\int_{-L}^{L} e^{\frac{k\pi i}{L}x}\,\overline{e^{\frac{l\pi i}{L}x}}\,dx = \int_{-L}^{L} e^{(k-l)\frac{\pi i}{L}x}\,dx$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 2L & \text{si } k = l. \end{cases}$$

On peut donc calculer la projection orthogonale sur $W_N^{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{\frac{k\pi i x}{L}}, |k| \leq N\}$ de n'importe quelle $f \in V = C^0([-L,L], \mathbb{C})$:

$$\pi_{W_N^{\mathbb{C}}}(f) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\langle f, e^{\frac{k\pi i x}{L}} \rangle}{\langle e^{\frac{k\pi i x}{L}}, e^{\frac{k\pi i x}{L}} \rangle} e^{\frac{k\pi i x}{L}}$$

(N-ème approximant de Fourier exponentiel de f)

notation: $S_N^{\mathbb{C}}(f)(x)$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\frac{k\pi i x}{L}}$$

avec $\boxed{c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{k\pi i x}{L}} dx}$.

Si f est réelle, cette projection orthogonale est la même que celle sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{\cos(\frac{n\pi}{L}x), \sin(\frac{n\pi}{L}x), n = 0, \dots, N\}$

puisque

$$e^{\frac{k\pi i x}{L}} = \cos(\frac{k\pi}{L}x) + i \sin(k\frac{\pi}{L}x).$$

et il y a une relation entre les a_n, b_n $(n = 0, \dots, N)$ et les c_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N)$:

pour $n > 0$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - i b_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + i b_n}{2} \end{aligned}}$$

la série de Fourier exponentielle de f sur $[-L,L]$

$$\boxed{S^{c}(f)(x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{k\pi i x}{L}}\right) \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{2L} = \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{k\pi i x}{L}} x}$$

Exemple: $f(x) = x$ sur $[-\pi,\pi]$.

on a vu que $a_n = 0$

$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$

(pour $n>0$).

On calcule (pour $k \neq 0$)

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{intégration} \\ \text{par parties}}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx + \left[x \frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi k i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \frac{\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}}{-ik}$$

$$= 0 - \frac{1}{2ik} \cdot 2\cos(k\pi) = \frac{i}{k}(-1)^k$$

pour $k=0$, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$.

Vérification du lien entre a_n, b_n et c_k ?

(pour $n>0$) $c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{-i \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}}{2}$

$= (-1)^n \frac{i}{n}$ ✓