rappel: La série $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ de terme général u_n est la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles

$$s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{k+1} = \sum_{n=0}^{k} u_n$$

La série converge s'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{k\to\infty} s_k = \alpha$, dans ce cas, la limite s'appelle la somme de la série, et on note

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \alpha.$$

Si elle ne converge pas, on dit que la série diverge.

On voudrait des outils pour étudier la convergence des séries (pas forcément calculer la somme, ce qui est souvent plus difficile).

On commence par des outils qui s'appliquent uniquement aux séries à termes positifs, càd. qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. ($u_n \in \mathbb{R}$ et) $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Dans ce cas, on a que la suite (s_k) est croissante pour $k \geq n_0$, càd.

$$s_{k+1} \geq s_k$$

puisque

$$s_{k+1} = (u_0 + u_1 + \dots + u_k) + u_{k+1} = s_k + u_{k+1} \geq s_k.$$

Par une propriété des nombres réels, ceci implique que (s_k) converge si et seulement si elle est majorée, càd. il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q.

$$s_k \leq M \text{ pour tout } k.$$

Ceci a pour conséquence la proposition suivante

(ÉQUIVALENTS) (COMPARAISON)

<u>Prop</u>: Soient $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ deux séries.

1) Si il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

pour tout $n \geq n_0$, alors

$$\Big(\sum_{n\geq 0} v_n\Big) \text{ converge} \Rightarrow \Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big) \text{ converge}$$

2) Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n, v_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

alors $\Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big)$ converge $\Leftrightarrow \Big(\sum_{n\geq 0} v_n\Big)$ converge.

<u>Rem</u>:

- toujours sous l'hypothèse que $0 \leq u_n \leq v_n$, par contraposée de la partie 1), on a aussi

$$\Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big) \text{ diverge} \Rightarrow \Big(\sum_{n\geq 0} v_n\Big) \text{ diverge}.$$

- l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ s'écrit souvent $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, et on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>équivalente</u> à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou que (v_n) est un équivalent de (u_n) pour $n \to \infty$.
- Sous l'hypothèse que que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, pour vérifier qu'il existe n_0 t.q. $u_n, v_n > 0$ pour n_0, il suffit de le vérifier pour une seule des deux termes généraux. (en effet, si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang)
- Il y a un résultat analogue pour les séries à termes négatifs.

preuve de la proposition :

1) on note $s_k = \sum_{n=n_0}^{k} u_{\cancel{k}n}$ (k-ème somme partielle de $(\sum_{n\geq n_0} u_n)$)

$t_k = \sum_{n=n_0} v_{\cancel{k}n}$ (k-ème somme partielle de $(\sum_{n\geq n_0} v_n)$)

on a alors $s_k \leq t_k$ pour tout k

si $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge, t_k est majorée,

donc s_k est majorée (et croissante)

donc s_k converge, càd $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge

2) L'hypothèse $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ implique qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2 \quad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

* si $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge, alors $(\sum_{n\geq 0} 2v_n)$ converge (par linéarité des séries) et on a pour $n \geq n_1$

$\frac{u_n}{v_n} \leq 2$ donc $u_n \leq 2v_n$ (car $\underline{\underline{v_n > 0}}$)

donc la partie (1) donne $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge

* si $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge, alors $(\sum_{n\geq 0} 2u_n)$ converge, et pour $n \geq n_1$ on a

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

donc $\frac{1}{2} v_n \leq u_n$ (car $\underline{\underline{v_n > 0}}$)

ou encore $v_n \leq 2u_n$

à nouveau par (1), $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge

CQFD.

Cette proposition n'est utile que si on a des séries simples (et à termes positifs) dont on connaît les propriétés de convergence.

Ex: on a vu

- $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge (série harmonique)
- $\left(\sum_{n\geq 0} \alpha^n\right)$ converge si et seulement si $|\alpha|<1$ (série géométrique)

On veut plus d'exemples !

Généralisation importante de la série harmonique :

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ s'appelle la série de Riemann de paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$.

rappel : Si $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

en particulier, pour $\alpha\leq 0$, il est clair que la série de Riemann diverge.

Prop : Soit $\alpha>0$. Alors la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$

* diverge pour $0\leq\alpha\leq 1$
* converge pour $\alpha>1$.

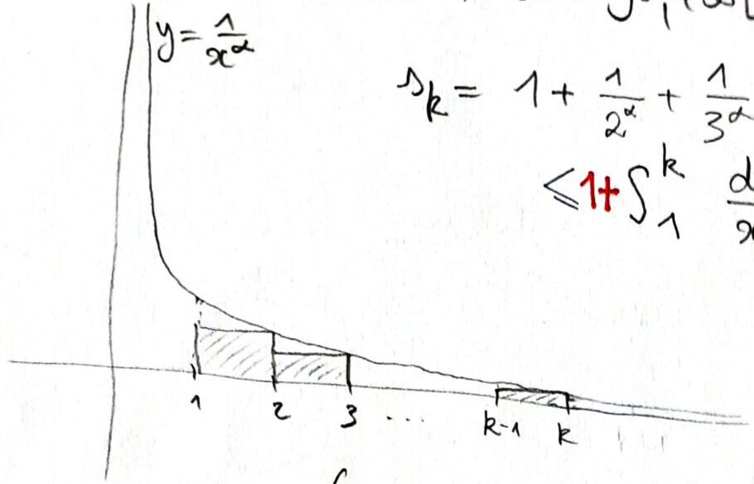
preuve :

* pour $\alpha\leq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n\geq 1$

(en effet, comme $\beta = 1-\alpha \geq 0$
$(x^\beta)' = \beta x^{\beta-1} \geq 0$ pour $x\in\,]0,+\infty[$
donc $x\mapsto x^{1-\alpha}$ est croissante,
c.à.d. $n^{1-\alpha}\geq 1^{1-\alpha}=1$)

Comme $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\right)$ diverge, par comparaison $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\right)$ diverge

* La preuve de la convergence pour $\alpha>1$ est "géométrique"; on utilise que $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc



$$s_k = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha}$$
$$\leq 1 + \int_1^k \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^k$$
$$= 1 + \frac{k^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

(comme $\alpha>1$, $1-\alpha<0$, donc $k^{1-\alpha} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$)

donc s_k est majorée, donc $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ cv.

<u>Exemples</u>

1). $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$)

2) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)$ converge, car

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (Riemann, $2>1$)

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\right)$ converge (Riemann, $3>1$)

et on peut utiliser la linéarité des séries.

Une autre façon de voir la convergence : utiliser les équivalents.

$$\frac{\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} = 1 - \frac{5}{2}\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

càd. $\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^3} > 0$

et on sait que $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^3}\right)$ converge par Riemann $(3>1)$ et linéarité des séries

3) $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2}\right)$ converge, car

$$0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

et $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge,

donc par comparaison $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2}\right)$ converge.

4) $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$ diverge, car

$$\frac{n+1}{n\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} > 0$$

et $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}\right)$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2}<1$)

5) $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\right)$ converge

par $n\geq 1$, $\sqrt{n} \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \leq e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{e}$, $\left|\frac{1}{e}\right|<1$).

donc par comparaison $\left(\sum \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

6) on peut aussi remplacer un terme général compliqué par un équivalent simple
(cF. recherche d'équivalents en L1)

$\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n\right)$ avec $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{n}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

càd. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{}{\overset{n\to\infty}{\sim}} \frac{1}{2n^2}$

$$\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{2n^2}} = 1 + \frac{o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{2n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1\right)$$

donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^3} > 0$

donc $\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n\right)$ converge, car $\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}\right)$
(série de Riemann de paramètre $3>1$)

Un dernier critère de convergence des séries, très utile en pratique (critère de d'Alembert)

Prop: Soit $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ une série telle qu'il existe n_0 avec $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$.

si $|\lambda| < 1$, alors $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge (absolument)

si $|\lambda| > 1$, alors $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge

Preuve: • si $|\lambda|<1$, on prend α avec $|\lambda|<\alpha<1$.

Comme $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |\lambda|$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha \quad \text{pour } n \geq n_1.$$

alors
$$|u_{n+1}| \leq \alpha |u_n| \leq \alpha^2 |u_{n-1}| \leq \dots \leq \alpha^{n+1-n_1} |u_{n_1}|$$
$$= \alpha^{1-n_1} |u_{n_1}| \cdot \alpha^n$$

et $\left(\sum_{n\geq n_1} \alpha^n\right)$ converge car $\alpha<1$ (série géométrique)

donc par comparaison, $\left(\sum_{n\geq 0} |u_n|\right)$ converge

ce qui implique $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

• Exo: traiter le cas $|\lambda|>1$

Exemple: Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right)$ converge,

car si $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(en fait $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$)