Chapitre 4. Séries numériques

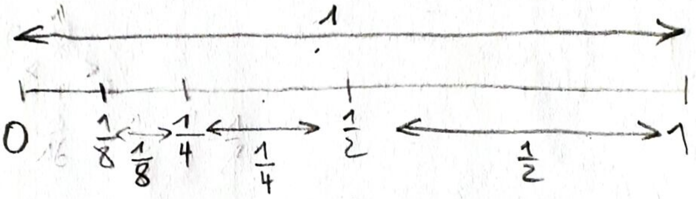
Le but de ce chapitre est de donner un sens à des "sommes infinies", comme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$$

En première approximation, on pourra penser à une somme d'un nombre infini de termes, mais pour formaliser cette notion, on étudiera le comportement de sommes finies dans lesquelles on prend de plus en plus de termes :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$



Lorsque n tend vers $+\infty$, $1-\frac{1}{2^n}\longrightarrow 1$

Donc, en prenant n suffisamment grand, on peut rendre la somme finie (de beaucoup de termes)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

arbitrairement proche de 1, ce qu'on voudrait écrire

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots=1.$$

Déf: Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres (réels ou complexes), on définit la suite de sommes partielles

$$s_k=u_0+u_1+\dots+u_k=\sum_{n=0}^{k}u_n$$

La suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se note aussi $\left(\sum_{n\geq 0}u_n\right)$, et on l'appelle la série de terme général u_n.

Plus généralement, on considèrera aussi des suites $(u_n)_{n\geq n_0}$, pour lesquelles $s_k=u_{n_0}+u_{n_0+1}+\dots+u_{n_0+k}$ (somme des $k+1$ premiers termes)

- Dans l'exemple ci-dessus, la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\right)$ est la suite des sommes partielles

$$s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

mais on pourrait considérer la série $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\right)$, pour laquelle on considère

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

- Pour la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$, la k-ème somme partielle est

$$s_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

pour laquelle on n'a pas de formule "simple" !

- Pour la série $\left(\sum_{n\geq 0} 1\right)$, on obtient

$$s_k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k+1 \text{ termes}} = k+1$$

- Pour la série $\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n\right)$, on obtient

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

- Pour la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$, la k-ème somme partielle est

$$s_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2}$$

(pour laquelle, à nouveau, on n'a pas de formule "simple").

Définition : On dit que la série $\left(\sum_{n \geq n_0} u_n\right)$ converge si la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers un réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si c'est le cas, on écrit $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n = \alpha}$

et on dit que α est la somme de la série.

Si ce n'est pas le cas, on dit que $\left(\sum_{n \geq n_0} u_n\right)$ diverge

Retour aux exemples :

- $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}\right)$ converge, car pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$$

De plus, la somme de la série vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

- $\left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}\right)$ converge aussi, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

$$= 2.$$

rem : Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la série $\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$ converge si et seulement si $\left(\sum_{n \geq n_0} u_n\right)$ converge (même si dans ce cas, la somme de ces séries est différente, puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = (u_0 + \dots + u_{n_0 - 1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n).$$

- $\left(\sum_{n \geq 0} 1\right)$ ne converge pas, puisque

$$s_k = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ termes}} = k \xrightarrow{k \to \infty} +\infty$$

- $\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\right)$ ne converge pas non plus, car

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et la suite des sommes partielles ne converge pas (elle oscille entre les deux valeurs 0 et 1)

Par les deux autres exemples $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)$ on ne sait pas (encore) si ces séries convergent !

<u>Attention</u>: Dans l'étude d'une série $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$, il y a deux suites très différentes :

- le terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- la suite des sommes partielles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$s_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n_0+k-1}$$

la convergence de ces deux suites n'est <u>pas</u> équivalente, mais il y a un lien :

<u>Prop</u>: Si $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ converge, alors le terme général de la série tend vers 0.

càd. $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ converge $\Rightarrow$ $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Attention</u>: la réciproque est fausse (on verra un contre-exemple à la réciproque cidessous).

<u>preuve</u>: pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$s_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n_0+k-1} + u_{n_0+k}$$

$$s_{k-1} = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n_0+k-1}$$

donc $s_k - s_{k-1} = u_{n_0+k}$

Si $s_k \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$, alors $s_{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$, donc

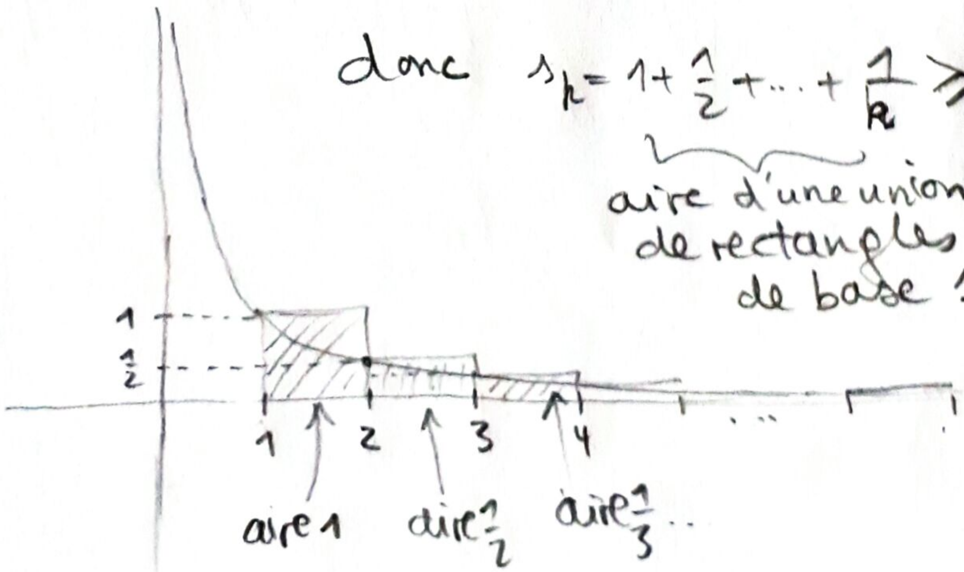
$$s_k - s_{k-1} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha - \alpha = 0$$

càd $u_{n_0+k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, ou encore $u_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ∎

La proposition confirme que $\left(\sum_{n\geq 0} 1\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n\right)$ ne converge pas (par contraposée de l'implication de la proposition)

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ donne un contre-exemple à la réciproque, càd son terme général tend vers 0, mais elle ne converge pas!

preuve géométrique: noter que la fonction $\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$



donc $s_k = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}}_{\text{aire d'une union de rectangles de base 1}} \geq \int_1^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(k+1)$

donc $s_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$ CQFD

La série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ s'appelle la série <u>harmonique</u>.

Série géométrique : on fixe $\lambda \in \mathbb{C}$, et on regarde la série de terme général λ^n, $\left(\sum_{n\geq 0} \lambda^n\right)$.

S_k = k-ème somme partielle

$$= 1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^k = \sum_{n=0}^{k} \lambda^n.$$

Comme par $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k} = 2-\frac{1}{2^k}$, il y a une formule simple par s_k, à savoir

$$1+\lambda+\dots+\lambda^k = \sum_{n=0}^{k} \lambda^n = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$$

← nombres de termes dans la somme

(preuve : EXO)

"Somme géométrique de raison λ"
(attention : il faut commencer à l'indice 0)

Prop: la série géométrique $\left(\sum_{n\geq 0} \lambda^n\right)$ converge si et seulement si $|\lambda|<1$, et si c'est le cas, alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}.$$

(noter que si $|\lambda| \geq 1$, le terme général λ^n ne tend pas vers 0, donc la proposition précédente implique la divergence).

On voudrait des outils pour vérifier la convergence de séries compliquées, en se basant sur les exemples "simples".

remarque préliminaire : (linéarité des séries).

Si $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq n_0} v_n\right)$ convergent toutes les deux et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\left(\sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)\right)$ converge aussi, et on a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n.$$

Une classe relativement simple de séries : séries à termes positifs
càd $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ avec $u_n \geq 0$ pour tout n.

Lemme : Soit $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ une série à termes positifs.
Alors la suite s_k est croissante, donc il y a deux possibilités :

(1) si (s_k) est majorée (càd. il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ t.q. $s_k \leq M$ pour tout k) alors elle converge.

(2) sinon, $s_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$.

Il peut être utile, pour des séries qui ne sont pas à termes positifs, de se ramener au cas des séries à termes positifs !

Une façon de faire :
on "remplace" $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ par $\left(\sum_{n\geq n_0} |u_n|\right)$, la série des valeurs absolues.

a priori ces deux séries sont très différentes, mais il y a un lien entre leurs propriétés de convergence.

Prop : Si $\left(\sum_{n\geq n_0} |u_n|\right)$ converge, alors $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ converge.

La preuve de cette proposition utilise l'inégalité triangulaire (et la notion de suite de Cauchy, hors programme).

Déf: $\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right)$ est dite <u>absolument convergente</u> si $\left(\sum_{n\geq n_0} |u_n|\right)$ converge.

La proposition précédente peut être formulée comme l'implication

$$\boxed{\text{convergence absolue} \Rightarrow \text{convergence.}}$$

Att<u>ention</u>: la réciproque est fausse.
Un contre-exemple à la réciproque est la série harmonique alternée: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

On a vu que $\left(\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right) = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge, et pourtant $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

<u>preuve</u>: comme le terme général décroît $\left(\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right)$

$$s_{2k} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)}_{>0}$$

$$s_{2k+1} = 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1}\right)}_{>0}$$

donc s_{2k} est croissante (et majorée), et s_{2k+1} décroissante (et minorée)
donc ces deux suites convergent.

Comme $s_{2k+1} - s_{2k} = \frac{1}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, elles convergent vers la même valeur, ce qui implique que (s_k) converge.