Chapitre 3. Produits scalaires

1. Définitions / exemples
2. Propriétés géométriques
3. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt
4. Diagonalisation orthogonale des matrices symétriques.

On a déjà étudié deux méthodes différentes pour produire des bases orthogonales pour une FBS :

- réduction de Gauss
- algo de Gram-Schmidt (ne marche systématiquement que pour les produits scalaires)

dans ce chapitre, on étudie une troisième méthode, basée sur les valeurs/vecteurs propres (cf. cours d'algèbre linéaire L1)

Idée naïve : on a vu deux formules de changement de base, pour les applications linéaires ($P^{-1}MP$) et pour les formes bilinéaires (${}^tPMP$).

En général, ces formules sont très différentes, sauf pour la classe des matrices inversibles P qui satisfont la propriété ${}^tP = P^{-1}$.

<u>Déf</u> : Une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ est dite <u>orthogonale</u> si elle satisfait ${}^tP \cdot P = I_n$.

<u>remarque</u> : ${}^tP \cdot P = I_n$ si et seulement si (P est inversible et $P^{-1} = {}^tP \cdot P$)

on va voir d'autres formulations équivalentes, utiles en pratique.

<u>Proposition</u> : Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(1) P est orthogonale

(2) $\langle Pv, Pw\rangle = \langle v, w\rangle$ pour tous $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

(3) $\|Pv\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ $\left(\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}\right)$

(4) Les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

preuve :

(1) ⇒ (2) $\langle Pv, Pw\rangle = {}^t(Pv)\cdot Pw = {}^tv({}^tPP)w \underset{\uparrow}{=} {}^tv.w = \langle v, w\rangle$.
car P est orthogonale

(2) ⇒ (3) clair, on prend $v=w$ dans (2) (et on extrait la racine carrée)

(3) ⇒ (2) découle de la formule de polarisation

(2) ⇒ (4) on rappelle que les colonnes de P sont les Pe_k, $k=1,\dots,n$ où e_k est le k-ème vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée par le produit scalaire usuel.

(4) ⇒ (1) découle de la définition du produit matriciel, puisque la composante (j,k) de ${}^tP.P$ est le produit scalaire usuel de la j-ème ligne de ${}^tP$ avec la k-ème colonne de P, càd. par définition de la transposée, le produit scalaire usuel de la j-ème colonne de P avec la k-ème colonne de P.

Théorème: Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPMP = P^{-1}MP$ soit diagonale

---

Le résultat dit qu'on peut diagonaliser simultanément

* l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto MX$

* la forme bilinéaire symétrique $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \longmapsto {}^tXMY$

(on parle parfois de "diagonalisation simultanée").

rappel: $P^{-1}MP = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ (matrice diagonale)

$\iff MP = PD$

Si on écrit $P = (P_1|P_2|\dots|P_n)$ sous forme de colonnes

on a $PD = (d_1P_1|d_2P_2|\dots|d_nP_n)$

$MP = (MP_1|MP_2|\dots|MP_n)$

par définition du produit matriciel.

Donc l'égalité $MP=PD$ est équivalente au fait que pour $k=1,\dots,n$, la k-ème colonne de P est un vecteur propre de M, de valeur propre d_k.

Autrement dit, le théorème affirme que pour toute matrice symétrique M, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ qui

(i) consiste en des vecteurs propres de M et

(ii) soit orthonormée pour le produit scalaire usuel.

Si on demandait seulement (i), c'est un résultat du cours d'algèbre de ~~L1~~ S3 (tout matrice symétrique est diagonalisable).

Par rapport au résultat de L1, la nouveauté est le fait qu'on peut choisir la base de sorte qu'elle satisfasse aussi (ii).

La clé de la preuve est le lemme suivant.

Lemme: Soit M symétrique et $v, w \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres de M de valeurs propres distinctes. Alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

preuve: (du lemme)

Supposons $Mv = \lambda v$, $Mw = \lambda w$ avec $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$.

Alors on a

$$\langle Mv, w\rangle = {}^t(Mv)\, w = ({}^tv\, {}^tM)\, w \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } M \\ \text{est symétrique}}}{=} {}^tv\, M w = \langle v, Mw\rangle,$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel.

Ceci implique $\langle \lambda v, w\rangle = \langle v, \mu w\rangle$

donc par bilinéarité, $\lambda \langle v, w\rangle = \mu \langle v, w\rangle$

ou encore $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$

et finalement $\langle v, w\rangle = 0$

(car $\lambda - \mu \neq 0$) CQFD.

Preuve du théorème/algorithme de calcul d'une base orthonormée (par le produit scalaire usuel) de vecteurs propres:

On calcule le polynôme caractéristique de M,

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n)$$

et on cherche ses racines (qui sont les valeurs propres de M).

[Noter que toute valeur propre est réelle, puisque si $Mv = \lambda v$ avec $v \neq 0$, alors $\langle v, v\rangle \neq 0$

$$\langle Mv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$$

donne $\lambda = \dfrac{\langle Mv, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}$]

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) de M.

Pour chaque λ_k ($k = 1, \dots, r$) on calcule une base orthonormée du sous-espace propre correspondant

$$E_{\lambda_k} = \operatorname{Ker}(M - \lambda_k I_n)$$

[prendre une base quelconque, et lui appliquer Gram-Schmidt]

Par le lemme, les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_r}$ sont deux à deux orthogonaux, ce qui implique qu'il sont en somme directe.

Le résultat de L1 (diagonalisabilité des matrices symétriques) implique que

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dots + \dim(E_{\lambda_n}) = \dim(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$$

donc pour construire une base comme dans le théorème, il suffit de prendre la réunion de bases orthonormées de chaque E_{λ_k}.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(M - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda-3)^2$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 3.$$

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(M - (-3)I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

orthogonaux

orthogonaux

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(M - 3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut des bases orthonormées, donc on réécrit

pas orthogonaux → utiliser Gram-Schmidt

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

La base $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel, et elle diagonalise M.

Plus précisément, si $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, on a

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De plus, comme (e_1, e_2, e_3) est orthonormée par le produit scalaire usuel, P est orthogonale, et on a aussi

$$ {}^tP M P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, $$

ce qui permet de diagonaliser la forme bilinéaire symétrique

$$ \begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto {}^tX M Y \end{aligned} $$

càd.
$$ \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_2 $$

Les coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3) correspondant à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique satisfont

$$ X = PX', $$

càd.
$$ X' = (P^{-1})X = ({}^tP)X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} $$

càd
$$ \begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{\sqrt{3}} \\ x_2' = \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \\ x_3' = \dfrac{x_1 + x_2 + 2x_3}{\sqrt{6}} \end{cases} $$

Donc la forme quadratique satisfait

$$ \begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \\ &= -3(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + 3(x_3')^2. \end{aligned} $$