Examen du 18 juin 2012, de 7h30 à 10h30.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

1. MÉTHODE DE NEWTON

Dans cet exercice, on se propose d'approcher avec une bonne précision les racines de l'équation $x^3-3x^2-30x-24=0$. On pose $f(x)=x^3-3x^2-30x-24$.

(1) Montrer que l'équation a exactement trois solutions réelles.

(2) Décrire les suites itératives obtenues par la méthode de Newton pour résoudre $f(x)=0$, pour une valeur initiale x_0 quelconque.

(3) Pour chacune des trois solutions β_j, $j=1,2,3$, donner une valeur initiale $x_0^{(j)}$ telle que $x_0^{(j)}\in\mathbb{Z}$ et pour laquelle la suite $(x_n^{(j)})$ donnée par la méthode de Newton converge vers β_j.

(4) On note $x_n^{(j)}$ le n-ème itéré de la méthode de Newton, partant de $x_0^{(j)}$. Donner une estimation théorique de l'erreur $|x_n^{(j)}-\beta_j|$; on précisera des valeurs approchées de cette estimation pour $n=1$, $n=2$, $n=3$ et $n=4$.

2. ALGÈBRE LINÉAIRE, VALEURS ET VECTEURS PROPRES

On considère la matrice

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) Calculer $\det(A-\lambda I)$ pour $\lambda=-1$, 0, 1 et 2 (on pourra utiliser `Xcas`).

(2) Déduire le polynôme caractéristique de A par interpolation de Lagrange ; on donnera le polynôme sous la forme

$$P(X)=\alpha_0+\alpha_1(X-x_0)+\alpha_2(X-x_0)(X-x_1)+\alpha_3(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)$$

(3) Montrer que A a trois valeurs propres réelles distinctes, et donner une estimation grossière de ces valeurs propres (on les notera $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$).

(4) On choisit un vecteur v_0 au hasard, et on applique la méthode de la puissance, c'est-à-dire que l'on définit récursivement $w_n=Av_{n-1}$, et $v_n=w_n/||w_n||$. Si la méthode fonctionne, pour n grand, v_n est proche d'un vecteur propre de A ; quelle est la valeur propre approchée correspondante ?

(5) Même question qu'en (4), mais on applique maintenant la méthode de la puissance à la matrice $B=(A-4I)^{-1}$.

3. INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Dans cette question, on s'intéresse au calcul approché des fonctions suivantes :

$$C(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,dt$$
$$S(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

Dans un premier temps, on calculera seulement $C(1)$.

Séries entières

3.1. (a) Rappeler le développement à l'ordre $2n+1$ de $\cos(t)$ autour de $t=0$, et donner une majoration du reste.

(b) Déduire du point précédent le développement de $\cos(t^2)$ à l'ordre $4n+3$ autour de $t=0$ (noter que ce développement est le même que celui à l'ordre $4n$).

(c) Montrer que le développement à l'ordre $4n$ de $C(x)$ autour de $x=0$ est donné par
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{x^{4k+1}}{4k+1}$$
et donner une majoration de l'erreur.

(d) Quelle valeur de n faut-il prendre pour obtenir une approximation de $C(1)$ à `1e-8` près ? Donner l'encadrement correspondant de $C(1)$.

(e) Montrer qu'en prenant la même valeur de n, on obtient les valeurs de $C(x)$ à `1e-8` près pour n'importe quel $x \in [0,1]$. En serait-il de même pour $x > 0$ grand ?

Méthode du point milieu

On souhaîte maintenant utiliser la méthode du point milieu pour le calcul de $C(1)$.

3.2. (a) Montrer que $C'(x) = \cos(x^2)$, et en déduire une expression pour $C''(x)$.

(b) Donner une majoration de $\max_{x\in[0,1]} |C''(x)|$.

(c) Donner une estimation de l'erreur commise quand on utilise la méthode du point milieu pour le calcul de l'intégrale définissant $C(1)$ avec un pas de $h = 1/n$.

(d) Comment faut-il choisir n pour approcher $C(1)$ avec une précision de `1e-8` ? Donner l'encadrement correspondant.

(e) Comment ces calculs changent-ils si on voulait calculer $C(x)$ avec $x \neq 1$? On pourra par exemple considérer le calcul de $C(10)$: vaut-il mieux utiliser un développement en série comme dans la partie 3.1, ou une méthode d'intégration (méthode du point milieu ou méthode de Simpson) ?

4. Question bonus

On souhaîte ici approcher la valeur du plus petit $x > 0$ tel que $C(x) = S(x)$.

4.1. (a) Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $C(\alpha) = S(\alpha)$, mais $S(x) < C(x)$ pour tout $x \in [0, \alpha[$.

(b) Donner une encadrement de α à 0.1 près, en justifiant soigneusement les deux inégalités.

(c) Proposer deux méthodes pour calculer α avec une précision raisonnable (disons `1e-8`).

(d) Comparer les difficultés techniques, l'ordre de grandeur du temps de calcul, et l'efficacité de ces deux méthodes.