Examen du 24 mai 2012, de 13h à 16h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

1. Interpolation de Lagrange

On considère la fonction $f(x) = 2x^3 + x - 1$, ainsi que les nombres $x_k = k$, pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. On note P_n, pour $n \geq 2$, le polynôme de Lagrange de f de points de contrôle $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(1) Donner une expression de P_2.

(2) Trouver les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que P_3 s'écrive sous la forme
$$\alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \alpha_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

(3) Donner une expression de P_4.

(4) Donner une estimation théorique de l'erreur commise sur $[0, 2]$ quand on remplace f par P_2 (on pourra citer un résultat du cours qui donne une estimation de $\max_{x \in [0,2]} |f(x) - P_2(x)|$).

2. Méthode de Newton

Dans cet exercice, on souhaîte calculer avec une bonne précision le nombre M donné par le maximum de la fonction
$$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x - 1$$
sur l'intervalle $[0, 3]$.

(1) Donner l'allure du graphe de f sur $[0, 3]$.

(2) En déduire une approximation grossière de M (que l'on voudra préciser par une méthode rigoureuse dans la suite).

(3) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 3]$ tel que $f(\alpha) = M$, et que α est un zéro du polynôme $g(x) = -5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 10x - 1$.

(4) Donner un intervalle $[a, b]$ avec $|b - a| < \frac{1}{2}$ contenant α.

(5) Montrer que la méthode de Newton pour la résolution de $g(x) = 0$ converge vers α quand on prend pour valeur initiale $x_0 = 3$.

(6) Appliquer la méthode de Newton (avec pour valeur initiale $x_0 = 3$) pour calculer des valeurs approchées de x_1, x_2, x_3. Donner une estimation théorique de l'erreur $|x_n - \alpha|$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

(7) A partir de quelle itération est-on certain de connaître α avec une précision 10^{-8} ?

(8) Cette précision suffit-elle à calculer M avec une précision de 10^{-8} ? En cas de reponse positive, justifier soigneusement ; en cas de reponse négative, proposer une strategie permettant de calculer M à 10^{-8} près.

3. Intégration numérique

Dans cette question, on s'intéresse au calcul approché d'une primitive pour la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x^3 + 1}$, c'est-à-dire au calcul de
$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt$$

Calcul des dérivées

3.1. Trouver des polynômes explicites P_1, P_2, ..., P_5 tels que la dérivée de f d'ordre $k \leq 5$ sastisfasse

$$(x^3+1)^{k+\frac{1}{2}} f^{[k]}(x) = P_k(x) \qquad (*)$$

Indication : on pourra bien entendu s'aider de `Xcas` *pour ce faire !*

Méthode du point milieu

On s'intéresse dans un premier temps au calcul de $g(1)$, pour lequel on doit intégrer f sur l'intervalle $[0,1]$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend un pas d'intégration constant, égal à $h = 1/n$.

3.2. (a) Donner l'approximation de $g(1)$ obtenue pour $n = 10$ avec la méthode du point milieu.

(b) Montrer que f''' s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$, et en déduire une majoration de $|f''|$ sur $[0,1]$ (on pourra utiliser la formule $(*)$ obtenue en 3.1).

(c) Rappeler l'ordre de la méthode du point milieu, et donner une estimation théorique de l'erreur commise en utilisant la méthode du point milieu avec un pas de $h = 1/n$.

(d) D'après l'estimation ci-dessus, comment doit-on choisir n pour connaître l'intégrale à 10^{-8} près ?

Méthode de Simpson

3.3. (a) Donner l'approximation de $g(1)$ obtenue pour $n = 10$ avec la méthode de Simpson.

(b) Etudier les variations de $f^{[4]}$ sur $[0,1]$ (on pourra rechercher les zéros approchés de $f^{[5]}$ dans $[0,1]$).

(c) En déduire une majoration de $|f^{[4]}|$ sur $[0,1]$.

(d) Donner une estimation théorique de l'erreur commise en utilisant la méthode de Simpson avec un pas de $h = 1/n$.

(e) D'après cette estimation, comment faut-il choisir n pour connaître l'intégrale à 10^{-8} près ?

Calcul de $g(x)$

Dans cette partie, on souhaîte trouver une méthode pour dessiner le graphe de g sur $[0,10]$; il s'agit donc de choisir des abscisses $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ dans $[0,10]$, et de calculer les valeurs de $g(x_j)$. Le graphe approché correspondant s'obtient alors en reliant les points $(x_j, g(x_j))$ et $(x_{j+1}, g(x_{j+1}))$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, par des segments de droite.

Comment choisir les points x_j, et à quelle précision doit-on calculer $g(x_j)$ pour obtenir un graphe réaliste (c'est-à-dire qui donne une bonne idée des variations de g, et tel que le dessin ne ressemble pas à une ligne brisée mais à une courbe dérivable) ?

Que proposez-vous comme méthode de calcul des $g(x_j)$? Peut-on calculer $g(x_{j+1})$ en utilisant $g(x_j)$? Au total, combien de fois devra-t-on évaluer la fonction f ?