Contrôle continu du 21 mars 2011, de 13h à 15h.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.
Les deux exercices sont indépendants.

1. Méthode du point fixe et de Newton

On s'intéresse à la résolution de l'équation

$$\sin(x) = x^2 \qquad (*)$$

1.1. Montrer que l'équation $(*)$ a exactement deux solutions, dont l'une est évidente et l'autre sera notée α dans toute la suite (*indication : étudier les variations de la fonction* $f(x) = x^2 - \sin x$ *; on pourra commencer par étudier le signe de* f'').

1.2. On note comme ci-dessus $f(x) = x^2 - \sin(x)$, et on veut utiliser la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

(a) Expliquer le principe de la méthode de Newton (on donnera une fonction $\varphi(x)$ telle que les suites de la méthode de Newton sont obtenues par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$).

(b) Montrer que pour $x_0 = 1$, la suite itérative donnée par la méthode de Newton converge vers α.

(c) Calculer une valeur approchée de x_4, si l'on part de $x_0 = 1$. Donner une estimation théorique de l'erreur commise en prenant x_4 comme approximation de α.

(d) Donner un encadrement de α à `1e-8` près.

1.3. Dans cette partie, on veut utiliser le théorème de point fixe contractant pour approcher α.

(a) Montrer que α est un point fixe de la fonction g définie par

$$g(x) = \sqrt{\sin x}$$

(b) Donner l'allure du graphe de la dérivée g' sur l'intervalle $]0,1]$.

(c) Montrer que g définit une contraction de l'intervalle $I = [0.5, 1]$, et que I contient α.

(d) On considère la suite (x_n) définie par itération de g, c'est-à-dire $x_{n+1} = g(x_n)$. Montrer que pour tout $x_0 \in I$, la suite est bien définie et converge vers α.

(e) Donner une estimation de $|x_n - \alpha|$ en fonction de n, et en déduire une borne sur le nombre d'itérations nécessaires pour approcher α avec une précision $\varepsilon > 0$.

(f) Déduire un encadrement de α à 10^{-8} près.

2. Séries de Taylor

2.1. On s'intéresse dans un premier temps à estimer $\cos(1)$.

(a) Rappeler le développement de Taylor $T_{2n+1}(x)$ de la fonction $\cos(x)$ à l'ordre $2n+1$ autour de $x = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

(b) Donner une majoration de l'erreur commise quand on remplace $\cos(x)$ par $T_{2n+1}(x)$, pour $x \in [0,1]$ (on donnera une majoration indépendante de x).

(c) Que donne la majoration obtenue en (b) pour $n = 3$? En déduire un encadrement de $\cos(1)$ par deux nombre rationnels.

(d) Combien de termes faut-il prendre dans le développement de $\cos(x)$ autour de $x = 0$ pour calculer $\cos(1)$ à `1e-8` près ?

2.2. On veut maintenant déduire des calculs précédents une estimation de $\mathrm{e}^{10\cos(1)}$.

(a) Rappeler le développement de Taylor de e^x à l'ordre n, et en déduire celui de e^{10x} ; on précisera une estimation des erreurs correspondantes.

(b) Donner un encadrement de $e^{10\cos(1)}$, obtenu à partir de l'estimation de $\cos(1)$ de l'exercice précédent et le développement de e^{10x} à l'ordre 4.

(c) Sachant que l'on connaît $\cos(1)$ à `1e-8` près, avec quelle erreur relative peut-on espérer calculer $e^{10\cos 1}$ (en supposant que l'on puisse calculer l'exponentielle exactement) ?

(d) Peut-on obtenir un encadrement de $\mathrm{e}^{10\cos(1)}$ à `1e-6` près, à l'aide de l'encadrement de $\cos(1)$ de la première partie et d'un développement de Taylor de l'exponentielle à un certain ordre ? Sinon, à quel point est-il nécessaire d'améliorer la précision du calcul de $\cos(1)$?

(e) Serait-il plus facile de calculer $\mathrm{e}^{\cos(1)}$? Expliquer comment on peut ramener le calcul de $\mathrm{e}^{10\cos(1)}$ à celui de $\mathrm{e}^{\cos(1)}$ (par réduction de l'argument).

(f) On pourrait aussi chercher un développement de Taylor pour la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$; écrire son développement à l'ordre 2. Discuter les avantages/inconvénients d'une telle approche.