Examen du 21 mai 2014, de 8h à 11h.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

Exercice 1

Soit p le polynôme suivant :

$$p(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

1. Quel est le PGCD de p et p' ?
2. Montrer que p a une et une seule racine réelle, que l'on notera α. Que vaut $p'(\alpha)$?
3. Décrire les suites itératives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues par la méthode de Newton pour résoudre l'équation $p(x) = 0$.
4. Le théorème du cours utilisant la convexité donne-t-il la convergence des itérés de Newton ? Si oui, pour quels u_0 ? Si non, proposer une méthode pour approcher α.
5. Donner une estimation de α à 10^{-8} près (et justifier le fait que vous pouvez certifier cette précision).

Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt{x}e^x$.

1. Ecrire la dérivée quatrième sous la forme
$$f^{[4]}(x) = \sqrt{x}e^x \frac{P(x)}{Q(x)}$$
pour deux polynômes P et Q que l'on précisera (on suppose ici $x > 0$).
2. Donner une majoration de $\max\limits_{x\in[1,2]} |f^{[4]}(x)|$ (justifier votre résultat, par exemple sur base d'un tableau de variations de $f^{[4]}$).
3. Comment choisir le pas d'intégration dans la méthode de Simpson, si l'on veut calculer
$$\int_1^2 \sqrt{x}e^x \, dx$$
avec une précision 10^{-8} ?
4. La méthode ci-dessus marcherait-elle aussi bien pour calculer l'intégrale de f sur $[0, 1]$, au lien de $[1, 2]$?
5. Proposer une solution pour estimer $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx$ avec une précision raisonnable.

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$, et on note $x_k = 4(k/3 - 1)$, pour $k = 0, 1, \ldots, 6$.

1. Mettre la dérivée 7-ème $f^{[7]}(x)$ sous la forme
$$Q(x)e^{-x^2},$$
pour un polynôme Q à coefficients entiers. Donner les coefficients de Q.

2. Soit $I = [0,4]$. Montrer que $M_7 = \max_{x \in I} |f^{[7]}|$ est atteint en un unique point $\alpha \in I$. Donner une valeur approchée de α et de M_7, à 10^{-3} près (justifier soigneusement pourquoi vous pouvez certifier cette précision).
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré ≤ 6 tel que $P(x_k) = e^{-x_k^2}$ pour tout $k = 0, \ldots, 6$.
4. On écrit $P(X) = \sum_{n=0}^{6} a_n X^n$. Expliquer pourquoi $a_1 = a_3 = a_5 = 0$.
5. Donner une valeur approchée de a_6 à 10^{-8} près.
6. Donner sur un même système d'axes l'allure des graphes de P et de f sur $[-4,4]$.
7. Donner une majoration théorique de

$$\max_{x \in [-4,4]} |f(x) - P(x)|.$$

8. Cette majoration théorique est-elle du même ordre de grandeur que celle obtenue visuellement avec le graphe de la question précédente ?