Examen du 14 avril 2013, de 13h à 16h.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

Exercice 1

On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in [0,1]$. Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence de cette série ?
2. Donner une estimation théorique de l'erreur commise quand on approche $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}$ pour $x \in [0,1/2]$ par une somme finie
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n x^n}{n\sqrt{n}}.$$
3. En déduire une valeur approchée de $f(1/2)$ à 10^{-8} près.
4. En intégrant la série terme à terme, donner une série
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$
dont la somme est égale à $J = \int_0^{1/2} f(x)\ dx$.
5. Montrer que cette série est alternée.
6. A partir de quel n a-t-on
$$\frac{1}{2^{n+2}(n+2)(n+1)\sqrt{n+1}} < 10^{-8}?$$
7. Donner une dormule d'erreur pour la série obtenue ci-dessus, et en déduire le nombre de termes qu'il faut calculer pour obtenir une approximation de J à 10^{-8} près. Donner un encadrement de J à 10^{-8} près.
8. Les calculs ci-dessus seraient-ils valables pour l'intégrale $K = \int_{-1/2}^{0} f(x)\ dx$? Proposer une stratégie pour approcher K.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Montrer que f définit une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. On note g sa fonction réciproque, définie de manière unique par $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On commence par approcher $g(0)$.

2. Donner une suite itérative (u_n), obtenue à partir de la méthode de Newton, qui permette d'approcher la solution de l'équation $f(x) = 0$. On précisera bien comment choisir u_0, et l'on justifiera que cette suite est bien définie et converge vers $g(0)$.
3. Donner une majoration théorique de $|u_4 - g(0)|$. A partir de quel $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $|u_n - g(0)| < 10^{-8}$? Donner un encadrement de $g(0)$ à 10^{-8} près.

On souhaite maintenant approcher $g(a)$, pour un $a \in [0, 1]$ quelconque.

4. Décrire les suites itératives (u_n) que l'on obtient en approchant la solution de l'équation $f(x) - a = 0$ par la méthode de Newton.
5. Comment choisir un u_0 pour que la méthode de Newton soit bien définie et produise une suite convergente ? Montrer que la suite convergente ainsi obtenue converge vers $g(a)$ (pour tout $a \in [0, 1]$).
6. Décrire un test d'arrêt des itérations de Newton qui permette de garantir que l'on obtient une approximation à 10^{-8} près de $g(a)$ (pour $a \in [0, 1]$ quelconque).
7. Donner la valeur de $g(0.35)$ à 10^{-8} près.

On veut maintenant approcher

$$I = \int_0^1 g(x)\ dx,$$

où g est toujours la fonction réciproque de $f(u) = u^3 + u + 1$.

8. En effectuant le changement de variables $x = f(u)$, montrer que

   $$I = \int_\beta^0 u(3u^2 + 1)\ du$$

   pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$, et expliquer comment calculer β (on pourra faire le lien avec les parties 2 et 3 de l'exercice).
9. Donner un polynôme explicite P tel que $I = P(\beta)$. Si on connaît β à 10^{-8} près, à quelle précision connait-on I ? Donner un encadrement de I à 10^{-6} près.

Dans un second temps, on propose de calculer I directement avec la méthode des rectangle à gauche, et avec la méthode du point milieu. On rappelle que g est dérivable comme fonction réciproque de f, et que

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. On considère l'intervalle $[\beta, 0]$ où β est tel que $f(\beta) = 0$. Donner une minoration de $|f'|$ sur $[\beta, 0]$, et en déduire une majoration de g' sur $[0, 1]$.
11. Déduire de ce qui précède le pas d'intégration h nécessaire pour approcher l'intégrale I à 10^{-4} près avec la méthode des rectangles à gauche. Combien de valeurs de g sont-elles nécessaires pour obtenir une telle approximation ?
12. Donner un encadrement de I à 10^{-4} près.
13. Donner une formule analogue à (1) pour la dérivée seconde g'' (on pourra dériver les deux côtés de la formule (1)). Combien de fois faut-il évaluer g pour calculer I à 10^{-4} près, avec la méthode du point milieu ?
14. Comparer les deux méthodes de calcul de I. Vos encadrements sont-ils cohérents ? Quelle méthode vous parait la plus efficace ?