Examen du 27 juin 2014, de 8h30 à 11h30.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

1 Erreurs d'arrondi

On considère le polynôme $(x-1)^6$, que l'on entre dans Xcas de deux manières différentes ; d'une part `p(x):=(x-1)^6`, et d'autre part `q:=expand(p)`.

En fixant la précision de Xcas à 14 chiffres (par exemple par la commande `Digits:=14`), calculer les valeurs de p et de q en $x_j = a + jh$ pour j allant de 0 à 20, par exemple par la commande

```
a:=0.999; h:=0.0001; seq(p(a+j*h),j,0,20);
```

On ne demande pas de recopier toutes ces valeurs sur la copie d'examen !.

Comparer les valeurs obtenues, et commenter les résultats. Quelle écriture est la plus efficace ?

2 Polynômes

Soient P et Q les polynômes suivants :

$$P = x^4 - x^3 - 2, \qquad Q = 56x^2 + 150x - 365$$

1. Combien ont-ils de racines réelles ?
2. P et Q ont-ils une racine en commun ? Justifier votre réponse de façon détaillée !
3. Donner une approximation d'une racine réelle de P, différente de -1, avec une précision de 10^{-12} (justifier pourquoi vous pouvez garantir cette précision).

3 Points fixes/Newton

On considère l'équation

$$\ln(x^2 + 1) + x - 2 = 0.$$

3.1 Méthode de Newton

1. Montrer qu'il y a une et une seule solution a cette équation, située dans l'intervalle $[1, 2]$ (on note a cette solution).
2. Donner une valeur initiale u_0 qui garantisse que les itérés de Newton converge vers a (justifier votre réponse).
3. Donner une estimation théorique de $|u_3 - a|$ (pour le même choix de u_0 que dans la question précédente), et en déduire un encadrement de a.
4. Comment se comporte la valeur numérique de l'estimation théorique de la question précédente quand on fait varier le réglage de précision de Xcas ?
5. Donner une approximation de a à 10^{-12} près. Après quelle itération pouvez-vous garantir cette précision ?

3.2 Point fixe contractant

1. Montrer que a est l'unique point fixe de la fonction $g(x) = 2 - \ln(x^2 + 1)$ dans $[1, 2]$.
2. Calculer $|g'(a)|$ avec une précision (absolue) de 10^{-8}.
3. Peut-on approcher a par la méthode du point fixe appliquée à g ? Si oui, donner un intervalle dont g définit une contraction (justifier votre réponse !), et préciser la constante de contraction. Sinon, donner une autre fonction (et un intervalle) pour laquelle la méthode du point fixe pourrait s'appliquer.
4. Après combien d'itérations pouvez-vous garantir une précision de 10^{-12} ?

4 Intégration/séries

On veut calculer

$$I = \int_1^2 \cos(x^3)\ dx$$

de deux façons différentes. On note $f(x) = \cos(x^3)$.

4.1 Développement en séries

1. Donner le développement de Taylor de $\cos(x^3)$ autour de $x = 0$.
2. En intégrant ce développement terme à terme, montrer que $I = S_2 - S_1$ où

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{2^{6k+1}}{(2k)!(6k+1)}, \quad S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(6k+1)}.$$

3. Montrer que la série S_1 est alternée, et en déduire une majoration de l'erreur commise quand on remplace la série par une somme finie

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!(6k+1)}.$$

4. En déduire une valeur de S_1 à 10^{-12} près.
5. Montrer que la suite $a_k = \dfrac{2^{6k+1}}{(2k)!(6k+1)}$ est décroissante à partir d'un certain rang, et préciser un rang à partir duquel elle décroît (justifier votre réponse). En déduire que la série S_2 est alternée à partir d'un certain rang.
6. En déduire une valeur de S_2 à 10^{-12} près, puis une valeur approcheé de I dont vous préciserez l'erreur.

4.2 Méthode de Simpson

1. Donner une formule pour la dérivée quatrième $f^{[4]}(x)$.
2. Donner une majoration de $M_4 = \max\limits_{[1,2]} |f^{[4]}|$, et justifier soigneusement cette majoration ; *on ne demande pas forcément une majoration optimale, mais on veillera à ne pas donner une majoration trop grossière, afin de ne pas trop sur-estimer l'erreur dans la question suivante.*
3. Donner un pas d'intégration pour la méthode de Simpson qui permet de calculer I à 10^{-12} près (justifier votre réponse).