Examen du 26 juin 2013, de 14h30 à 17h30.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'approcher l'intégrale

$$I = \int_0^1 xe^{-x^3}\, dx.$$

On notera $f(x) = xe^{-x^3}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème $f^{[n]}$ peut s'écrire sous la forme $Q_n(x)e^{-x^3}$, où Q_n est un polynôme de degré $2n+1$.
2. Expliciter Q_1, Q_2,…, Q_5.

Dans le but d'utiliser la méthode du point milieu, on veut obtenir une estimation de f'' sur l'intervalle $[0,1]$. On note

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

3. Montrer que la dérivée troisième $f^{(3)}$ s'annule précisément deux fois sur $[0,1]$, une fois en $x=0$ et une autre en une valeur α.
4. Donner une valeur approchée de α et en déduire une valeur approchée de $f''(\alpha)$. Discuter l'ordre de grandeur de l'erreur de cette approximation.
5. Déduire une estimation de M_2, et détailler avec quelle précision vous connaissez ce maximum.
6. Quel pas faut-il choisir dans la méthode du point milieu pour obtenir une approximation de l'intégrale I à 10^{-8} près ? En combien de points faut-il évaluer f ?
7. Donner la valeur de I à 10^{-8} près.

On refait maintenant les mêmes calculs pour la méthode de Simpson, et on note en conséquence

$$M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

8. Montrer que la dérivée cinquième $f^{(5)}$ s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$, en une valeur de x que l'on notera β.
9. Donner une estimation de β à 10^{-4} près, et en déduire une majoration de M_4.
10. Quel pas faut-il choisir dans la méthode de Simpson pour obtenir une approximation de l'intégrale I à 10^{-8} près ? En combien de points faut-il évaluer f ?

TSVP

Exercice 2

On note f la fonction définie par

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x + 1.$$

.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0, 2]$, que l'on notera γ.
2. Décrire les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues par méthode de Newton pour la résolution de $f(x) = 0$. Préciser comment choisir u_0 pour garantir que cette suite soit bien définie et converge vers γ.
3. Donner une estimation théorique de l'erreur $|u_n - \gamma|$.
4. Calculer u_2, et déduire de votre estimation théorique un encadrement de γ.
5. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour approcher γ à 10^{-8} près ?
6. Donner un encadrement de γ à 10^{-8} près.

Exercice 3

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme

$$P^{(\lambda)} = X^4 - \lambda X^3 - 2X + 1.$$

1. Dans un premier temps, on considère le cas $\lambda = 0$, c'est-à-dire $P^{(0)} = X^4 - 2X + 1$.
   (a) Donner le nombre de racines de $P^{(0)}$ dans l'intervalle $[0, 2]$.
   (b) Toutes les racines de $P^{(0)}$ sont-elles réelles ?
   (c) $P^{(0)}$ a-t-il des racines multiples (réelles ou complexes) ?
2. Sur un même système d'axes, donner l'allure des graphes de $P^{(\lambda)}$ pour $\lambda = -1$, $-1/2$, 0, $1/2$, 1.

Dans la suite, pour alléger les notations, on notera P pour $P^{(\lambda)}$, en se souvenant que P dépend du paramètre λ. L'objectif de cet exercice sera de déterminer le nombre de racines de P dans $[0, 2]$ en fonction de λ. On notera $P_0 = P$, $P_1 = P'$, puis pour $k \geq 1$, comme dans l'algorithme de Sturm, tant que $P_k \neq 0$ on définit P_{k+1} comme l'*opposé* du reste de la division euclidienne de P_{k-1} par P_k. On note P_n le dernier reste non nul, donc la suite de Sturm est donnée par $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

3. Que donne la commande `Xcas` 'gcd' pour le calcul du pgcd de P et P' ? D'après l'allure des graphes obtenue en 2, pensez-vous que les racines de P sont toujours simples, quelle que soit la valeur du paramètre λ ?
4. La suite de Sturm de P a-t-elle toujours le même nombre de termes ? Quand λ varie, quelle elle est la plus petite valeur de n, le rang du dernier reste non nul dans l'algorithme de Sturm ? Quelle est la valeur minimale ?
5. Donner la liste valeurs de $P_0, \ldots, P_n$ en $x = 0$, et montrer que chaque terme peut s'écrire comme un quotient de deux polynômes en λ.
6. Faire pareil pour les valeurs de polynômes de Sturm en $x = 2$.
7. Montrer que pour $\lambda > 2$, P a une unique racine dans $[0, 2]$.
8. (question subsidiaire) Déterminer tous les intervalles maximaux de valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ sur lesquels P a un nombre constant de racines dans $[0, 2]$.