Contrôle continu
21 mars 2025

Exercice 1. (1) Rappeler la définition de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, et montrer que c'est une surface de Riemann.

(2) Montrer que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère S^2.

(3) Rappeler le résultat du cours décrivant le groupe des biholorphismes de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et démontrer ce résultat (on pourra admettre que le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{C}$ est le groupe affine des transformations de la forme $z \mapsto az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$).

(4) Montrer que toute fonction polynômiale $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z_d$ s'étend en une fonction holomorphe de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ vers lui-même (quand on voit $\mathbb{C}$ comme une carte de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

(5) Montrer plus généralement que toute fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) s'étend en une fonction holomorphe de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ vers lui-même.

(6) Toutes les fonctions fonctions holomorphes $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont-elles induites comme ci-dessus par une fraction rationnelle ?

Exercice 2. On rappelle qu'un *réseau* de $\mathbb{C}$ est un sous-groupe additif de la forme $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$, où $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(1) Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer que le quotient $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est une surface de Riemann compacte, qui est homéomorphe à $S^1 \times S^1$. Montrer qu'il n'existe pas d'application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X$.

(2) Rappeler (sans preuve) le résultat du cours qui dit quand deux quotients $\mathbb{C}/\Lambda_1$, $\mathbb{C}/\Lambda_2$ sont biholomorphes (pour Λ_1, Λ_2 deux réseaux de $\mathbb{C}$).

(3) Pour tout réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$, donner une famille non dénombrable de biholomorphismes de $\mathbb{C}/\Lambda$.

(4) Décrire le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{C}/\Lambda$ en fonction de Λ.

Exercice 3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on considère le groupe $G = \langle \phi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ de biholomorphismes de $\mathbb{C}$ engendré par l'élément $\phi(z) = \lambda \cdot z$. On note $X = \mathbb{C}/G$ l'ensemble des orbites de l'action de G sur $\mathbb{C}$, et $f : \mathbb{C} \to X$ la projection canonique.

(1) Rappeler la définition de la topologie quotient sur X.

(2) Existe-t-il une structure de surface de Riemann sur X qui rende f holomorphe ?

(3) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est invariant sous l'action de G, et que le quotient $Y = \mathbb{C}^*/G$ admet une structure de surface de Riemann compacte telle que la projection canonique $g : \mathbb{C}^* \to Y$ soit holomorphe.

(4) L'application g est-elle un revêtement ?

(5) Quel est le genre de la surface Y ? Peut-elle être décrite comme un quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ comme dans l'exercice 2 ? Si oui, pour quel Λ ?