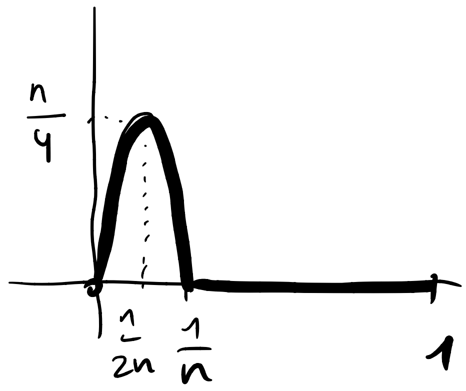
Corrigé CC1 Mat 402 (2025)

Exo 2



1) Si $x=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$f_n(x)=f_n(0)=0$$

donc $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Si $x\in]0,1]$, on choisit $N\in\mathbb{N}^*$ t.q. $n\geq N \Rightarrow \frac{1}{n}<x$.

(ce qui existe car $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<x$).

alors pour $n\geq N$ on a $f_n(x)=0$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ nulle à partir d'un certain rang d'où $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

domaine de CVS: $[0,1]$

limite simple: fonction nulle $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 0$

2)
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^{1/n} f_n(x)\,dx+\int_{1/n}^1 f_n(x)\,dx$$
$$=\int_0^{1/n}(n^2x-n^3x^2)\,dx+0$$
$$=\left[n^2\frac{x^2}{2}-n^3\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

3) Chaque f_n est continue sur $[0,1]$

(car $\lim_{x\to(\frac{1}{n})^-}(n^2x(1-nx))=0$)

Si la convergence était uniforme, on aurait

$$\frac{1}{6}=\int^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\,dx=0$$

ce qui n'est pas le cas, donc la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est <u>pas</u> uniforme

4) On choisit $N\in\mathbb{N}^*$ t.q. $n\geq N\Rightarrow\frac{1}{n}<a$, d'où pour $n\geq N$, f_n est nulle sur $[a,1]$, càd.

$$n\geq N\Rightarrow \sup_{[a,1]}|f_n-f|=0$$

ce qui donne la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[a,1]$.

Exo 3

1) pour $x=0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \sin(0) = 1$,

d'où $f_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \left|\frac{\sin(nx)}{1+nx^2}\right| \leq \frac{1}{1+nx^2},$$

Comme $1+nx^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $\frac{1}{1+nx^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ce qui implique $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

domaine de CVS: $\mathbb{R}$

limite simple: fonction nulle $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0\end{array}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\sin(1)}{1+\frac{1}{n}}.$$

Comme $\frac{\sin(1)}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \sin(1) > \frac{\sin(1)}{2}$

il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| > \frac{\sin(1)}{2},$$

en particulier $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|x| \geq a$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+na^2} \quad (\text{car } nx^2 \geq na^2)$$

d'où $0 \leq \sup_{]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[} |f_n - f| \leq \frac{1}{1+na^2}$

Comme $a \neq 0$, $\frac{1}{1+na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, donc

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$.