Exo 5 $\quad G \subset \mathbb{R}$ sous-gr. additif, $G \neq \{0\}$.

$P = G \cap \mathbb{R}_+^*$ (non vide car $x \in G \Leftrightarrow -x \in G$).

$\omega = \inf P$.

1) Soit $x \in G$, $x \neq 0$.
Si $x > 0$, $x \in P$. Si $x < 0$, $-x \in G$ et $-x > 0$ càd $-x \in P$

2) Soit $x \in P^{\subset G}$ t.q. $\omega \leq x < 2\omega$ (ça existe car $2\omega > \inf P$)
Si $\omega < x$, on prend $y \in P$ t.q. $\omega \leq y < x < 2\omega$ (c'est possible car $2\omega > \omega = \inf P$)
Alors $x - y \in G$ et $x - y > 0$, càd $x - y \in P$.
Mais $x < 2\omega$, et $y > \omega$ donne $-y < -\omega$
d'où $x - y < 2\omega - \omega = \omega$, ce qui contredit le fait que $\inf P$ minore P.

Donc $\omega < x$ est impossible, càd $\omega = x$. Alors $\omega \in G$
Comme pour tout $x \in G$, $x \pm \omega \in G$, $0 \in G$ donne $n\omega \in G$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, càd $\boxed{\mathbb{Z}\omega \subset G}$

Montrons que $G \subset \mathbb{Z}\omega$. Soit $x \in G$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $k \leq \frac{x}{\omega} < k+1$
($k = [\frac{x}{\omega}]$).
On a $k\omega \leq x < k\omega + \omega$.
Si $k\omega < x$, $x - k\omega \in P$ et est $< \omega$, contredit $\omega = \inf P$.
Donc $k\omega = x$, càd $x \in \mathbb{Z}\omega$

3) On suppose $\omega = 0$. Soit $x \in G$ t.q. $0 < x < b - a$ (ça existe car $b - a > \inf P$)
Si $a \geq 0$, on prend $k = \min\{k \in \mathbb{N} \mid kx \geq a\}$
(noter que $\{k \in \mathbb{N} \mid kx \geq a\}$ est non vide car $\mathbb{R}$ est archimédien).
alors $a \leq kx$, $(k-1)x < a$
d'où $\underset{\in G}{kx} < a + x < b$.
Si $b \leq 0$, on prend $x \in G$
$-b < x < -a$, d'où $a < \underset{\in G}{-x} < b$
Si $a < 0$, $b > 0$, on prend $x \in G$ t.q. $0 < x < b$.

4) $\mathbb{Q}$ est un ss-gr. additif de $\mathbb{R}$.
et $\inf \mathbb{Q}_+^* = 0$ car $\frac{1}{k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$
et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{Q}_+^*$
donc (3) s'applique.

$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$
- $\forall m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$, $(m + \alpha n) + (m' + \alpha n') = m + m' + (n + n')\alpha$
- $-(m + \alpha n) = (-m) + \alpha(-n) \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$
- $0 = 0 + 0\alpha \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$

5) $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$. Si $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$ $(p, q \in \mathbb{N}^*)$, montrons que

$$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$$

$\subset$ Si $m, n \in \mathbb{Z}$, $m + n\frac{p}{q} = \frac{mq+np}{q} \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$

$\supset$ Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ t.q. $up + vq = 1$, d'où

$$\frac{1}{q} = v + u\frac{p}{q} \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$$

et $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{m}{q} = mv + mu\frac{p}{q} \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}.$$

6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$ et $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, $\omega = \inf P$
$= \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$

Montrons que $\omega = 0$.

Supposons par l'absurde que $\omega > 0$.

alors $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \omega\mathbb{Z}$ par (2), d'où $\exists k \in \mathbb{Z}$

$1 = \omega k$, $k \neq 0$ et $\omega = \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$

et $\exists l \in \mathbb{Z}$ t.q.

$\alpha = \omega l = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$

contradiction.

donc $\omega = 0$, et (3) donne la densité.

En particulier, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ t.q. $0 < n + m\alpha < \varepsilon$.

on veut montrer qu'on peut trouver $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ avec la même propriété.

Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ t.q. $0 < u_0 + v_0\alpha < \varepsilon$

si $u_0 \geq 0$, on a gagné.

Sinon, soient $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$ t.q. $0 < u_1 + v_1\alpha < u_0 + v_0\alpha < \varepsilon$

si $u_1 \geq 0$, on a gagné

de plus, si $u_0 - u_1 \geq 0$, on a aussi gagné, car $0 < (u_0 - u_1) + (v_0 - v_1)\alpha < \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ on peut supposer $u_0 < u_1 < 0$.

$u_k, v_k \in \mathbb{Z}$ étant construit, on prend $u_{k+1}, v_{k+1} \in \mathbb{Z}$ t.q. $0 < u_{k+1} + v_{k+1}\alpha < u_k + v_k\alpha < \varepsilon$

après un nombre fini d'étape, on obtient un élément de $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ (soit $u_k + \alpha v_k$, soit $(u_k - u_{k+1}) + (v_k - v_{k+1})\alpha$) car il n'y a pas de suite infinie d'entiers < 0 strictement croissante.

ceci donne la densité de $\mathbb{N}+\alpha\mathbb{Z}$, par le même argument que dans la question (3)

Pour $\alpha = 2\pi \notin \mathbb{Q}$, l'exo donne que $\mathbb{N}+\alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Noter que $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante

Si $0 \leq a < b < 1$, $\exists !\ a', b' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ t.q. $a = f(a')$, $b = f(b')$.

on prend $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$b' < n + m \cdot 2\pi < a'$$

alors $\quad a < f(n+2\pi m) < b$

mais $f(n+2\pi m) = \cos(n+2\pi m) = \cos(n)$

d'où $\quad a < \cos(n) < b$.

Pour le sinus, on utilise $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $x \mapsto \sin(x)$

qui est strictement croissante et on raisonne de façon similaire

rem: (1) la densité de $\mathbb{N}+\alpha\mathbb{Z} = \{n + m\alpha \mid n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ implique que $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\{n + \alpha m \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}$ est aussi dense.

en effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

on prend $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - n_0 < n + m\alpha < b - n_0$

d'où $\quad a < \underbrace{(n_0 + n)}_{\geq n_0} + m\alpha < b$.

(2) autre façon de conclure exo:

<u>exo suppl</u>:

- $A \subset I$ dense $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ avec $|a - x| < \varepsilon$.
- $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $A \subset I$ dense $\Rightarrow f(I) \subset f(A)$ dense

soit $x \in I$ $\varepsilon > 0$
on prend $\delta > 0$ t.q. $|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$
$\exists a \in A$, $|x - a| < \delta$, d'où $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.