Feuille d'exercices n°3

1 Exemples de topologie, limites de suites, adhérence, intérieur, frontière

Exercice 1. $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,-4\}, \{1,2,3,-4\}, \mathbb{Z}\}$ est-elle une topologie sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 2. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Quelles conditions doivent vérifier A et B pour que $\mathcal{O} = \{\emptyset, A, B, E\}$ soit une topologie sur E ?

Exercice 3. [Topologie codénombrable] Soit X un ensemble et soit

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid A^c \text{ est dénombrable}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X.
2. Montrer que toute intersection denombrable d'ouverts est un ouvert.
3. Montrer que toute suite convergente de $(X, \mathcal{O})$ est stationnaire.

On suppose maintenant que X n'est pas dénombrable.

4. Montrer que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.
5. Est-ce que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est séparé ?
6. Est-ce que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est séparable ?

Exercice 4. Soit X un espace topologique tel que chaque point admet une base dénombrable de voisinages. Montrer que X est séparé si et seulement si les suites convergentes dans X admettent une seule limite.

Exercice 5. [Topologie de la convergence simple : non métrisable]
Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in [0,1]^N$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$, on définit

$$V_{f,x,\varepsilon} = \{g \in E \mid \forall i \in \{1, \cdots, N\}, |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon_i\}.$$

On définit $\mathcal{O}$ comme l'ensemble des réunions d'ensembles précédents.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur E.
2. Montrer qu'une suite de fonctions de E est convergente pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement.
3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de E nulles sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans E.
4. En utilisant une fonction de E non nulle sur un ensemble non dénombrable, montrer que la topologie précédente n'est pas métrisable.

Exercice 6.

1. Montrer qu'un espace topologique qui possède une base dénombrable d'ouverts est séparable.
2. Montrer que tout espace métrique séparable possède une base dénombrable d'ouverts. Est-ce vrai pour un espace topologique ?

Exercice 7.

1. Soit (E, d) un espace métrique séparable. Montrer que toute partie de E muni de la topologie induite est séparable.

Soit $\mathcal{B}$ la famille des rectangles semi-ouverts de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$[a, b[\times [c, d[$$

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie τ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la topologie induite τ_D sur la droite

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

   est la topologie discrète.
4. Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable mais que (D, τ_D) ne l'est pas.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

$$A =]-\infty, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \qquad B = \mathbb{Z} \qquad C = \mathbb{Q}$$
$$D = \left\{(-1)^k + 2^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad E = \{p^{-1} + q^{-1} : (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

Même question dans $\mathbb{R}^2$ avec $A =]-\infty, -1] \times \{0\} \cup [-1, 1[\times [-1, 1[$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie usuelle. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

1. Est-ce que c'est une partie ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A.
2. On munit A de la distance induite. Indiquer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées dans A et dans $\mathbb{R}^2$:

$$B =]0, +\infty[\times \{0\} \qquad C = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, xy < 1\} \qquad D = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1/2\}$$

Exercice 10. Soient E un espace topologique et A une partie de E. Montrer que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$ et $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$.

Exercice 11. Soit E un espace topologique et O_1, O_2 deux ouverts de E disjoints. Montrer que $\overline{O_1} \cap O_2 = \emptyset$. A-t-on $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} = \emptyset$?

Exercice 12. Soient E un espace topologique, et A, B des parties de E. Comparer les paires d'ensembles suivants. Lorsqu'il n'y a pas égalité, donner un contre-exemple.

$\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.	$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
$\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.	$\partial(A \cup B)$ et $\partial A \cup \partial B$.
$\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.	$\partial(A \cap B)$ et $\partial A \cup \partial B$.

Exercice 13. Soit A une partie d'un espace topologique. On note $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors ∂A est d'intérieur vide ; ce résultat reste-t-il vrai avec A fermé ? Avec A quelconque ?
2. Montrer que : A ouvert $\Longleftrightarrow A \cap \partial(A) = \emptyset$.
3. Montrer que : A fermé $\Longleftrightarrow \partial A \subset A$.

4. Montrer que : A ouvert et fermé $\iff \partial A = \emptyset$.
5. Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et $\partial(\overset{\circ}{A}) \subset \partial A$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

Exercice 14. Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques non vides. Soit $A \subset E_1$ et $B \subset E_2$. Montrer que

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

Quand a-t-on $\partial(A \times B) = \partial A \times \partial B$?

Exercice 15. Soit X un espace topologique, Y un sous-espace de X muni de la topologie induite et A une partie de Y.

1. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X et $\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y. Comparer $\overline{A}^Y$ et $\overline{A} \cap Y$.
2. On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A dans X et $\overset{\circ}{A}^Y$ l'intérieur de A dans Y. Comparer $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A}^Y$.

2 Continuité

Exercice 16. Soient X, X' des espaces topologiques et $f : X \to X'$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue ;
(ii) Pour tout $A \subset X'$, $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(A)}}$;
(iii) Pour tout $A \subset X'$, $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

Donner un exemple d'application continue f pour laquelle $\overline{f^{-1}(A)} \neq f^{-1}(\overline{A})$.

Exercice 17. Soit X un espace topologique, $A \subset X$ et $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ sa fonction caractéristique.

1. Montrer que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \partial A$.
2. A quelle condition χ_A est-elle continue sur X ?
3. En déduire l'équivalence entre
   (i) Les seules parties de X à la fois fermées et ouvertes sont $\emptyset$ et X.
   (ii) Toute application continue $X \to \{0, 1\}$ est constante.

Exercice 18. Soit X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$. Soit A une partie de X. Montrer les implications

$$f \text{ continue en tout point de } A \implies f_{|A} \text{ continue } \implies f \text{ continue sur } \overset{\circ}{A}.$$

Qu'en est-il des réciproques ?

Exercice 19. Soit X un ensemble infini muni de la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les parties de complémentaires finis et soit Y un espace topologique séparé. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ est constante.

Exercice 20. Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques non vides.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont séparés si et seulement si $E_1 \times E_2$ est un espace topologique séparé.
2. Soient f et g deux applications continues de E_1 dans E_2. On suppose que E_2 est séparé. Montrer que $\{x \in E_1 /\ f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E_1.
3. Avec les mêmes hypothèses, montrer que le graphe de f est une partie fermée de $E_1 \times E_2$.

Exercice 21. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ une application continue surjective.

1. Est-ce que si X est séparable, Y l'est aussi ?
2. Est-ce que si X admet une base dénombrable d'ouverts, Y aussi ?
3. Dans le cas d'une réponse négative à l'une des questions précédentes, est-ce que la réponse reste inchangée si maintenant X et/ou Y est(sont) supposé(s) être des espaces métriques ?

Exercice 22. Soient X un ensemble, Y un espace topologique et $f\colon X \to Y$. On pose

$$\mathcal{T}_f = \left\{ f^{-1}(O) \mid O \text{ un ouvert de } Y \right\} .$$

1. Montrer que $\mathcal{T}_f$ définit une topologie sur X. On l'appelle la *topologie tirée en arrière par* f.
2. Soit $\mathcal{T}_X$ une topologie sur X telle que $f\colon X \to Y$ continue. Montrer que $\mathcal{T}_f$ est la topologie la plus grossière rendant f continue, i.e. $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_X$.
3. Soient Z un espace topologique et $g\colon Z \to Y$ une application continue telle qu'il existe $\overline{g}\colon Z \to X$ vérifiant $g = f \circ \overline{g}$. Montrer que si on munit X de la topologie $\mathcal{T}_f$, alors $\overline{g}$ est continue.
4. On suppose que X est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ contenant strictement $\mathcal{T}_f$. Trouver un espace topologique Z et une application $\overline{g}\colon Z \to X$ telle que $f \circ \overline{g}$ est continue mais $\overline{g}$ ne l'est pas.

3 Connexité

Exercice 23. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont-ils connexes ? Quelles sont leurs composantes connexes ?

Exercice 24. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. Démontrer que $D \setminus \{M_0\}$ est connexe.
2. En déduire que D n'est homéomorphe à aucun segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exercice 25. On considère le sous-ensemble $X = \Big\{(x, y) \mid y = 0\Big\} \cup \Big\{(x, y) \mid x > 0, y = \dfrac{1}{x}\Big\}$ de $\mathbb{R}^2$. X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 26. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit, les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$D_n = \Big\{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\}, \qquad E_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \times \{n\} \qquad \text{et} \qquad F_n = \bigcup_{k \leq n} (D_k \cup E_k).$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est connexe.
2. On note $C = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ et $A = C \cup D$ où D est l'axe des ordonnées.
3. Montrer que A est connexe (on pourra établir que $C \subset A \subset \overline{C}$).
4. Démontrer que A n'est pas connexe par arcs. (On pourra supposer qu'il existe $f : [0, 1] \to A$ continue telle que $f(0) = (0, 0)$ et $f(1) = (1, 1)$ et considérer $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ où $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$.)

Exercice 27. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$X = \Big[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times [0, +\infty[\,) \Big] \cup \Big[\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times]-\infty, 0[\,) \Big]$$

X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 28.

1. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, muni de l'une des distances usuelles. Montrer que :
   (a) $\mathbb{R}^n \setminus H$ a deux composantes connexes C_1 et C_2, qui sont convexes.
   (b) Si $a \in H$, alors $C_1 \cup \{a\} \cup C_2$ est connexe par arcs.
   (c) Si A est un sous-ensemble strict de H, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ est connexe.
2. On note $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\},\ n \geq 2$.
   (a) Montrer que S^{n-1} est connexe par arcs.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ a deux composantes connexes.
   (c) Si $p \in S^{n-1}$, $S^{n-1} \setminus \{p\}$ est-elle connexe ?

Exercice 29. Soit $T = (\{0\} \times [-1,1]) \cup ([-1,1] \times \{0\})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est connexe.
2. Soit $f : T \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(T)$ est un segment.
3. Soit $x \in T$. Montrer que $T \setminus \{x\}$ est connexe si et seulement si x est l'un des quatre points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Montrer que $T \setminus \{(0,0)\}$ a quatre composantes connexes et que, dans les autres cas, $T \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes.
4. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 30. Soit (E,d) un espace métrique connexe non borné. Montrer que toute sphère (i.e. tout ensemble de la forme $\{x \in E \mid d(x_0,x) = r\}$ où $x_0 \in E$ et $r > 0$) est non vide.

Exercice 31. (Passage des douanes) Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset E$ une partie connexe. Soit $B \subset E$ une partie de E telle que A intersecte B et son complémentaire. Montrer que A intersecte la frontière de B.

Exercice 32. Soient $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et A, B deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

1. Démontrer que tout ouvert O de E contenant B rencontre A.
2. Montrer que $A \cup B$ est connexe en utilisant la définition de la connexité (on supposera l'existence de deux ouverts O_1 et O_2 tels que les ensembles $O_1' = (A \cup B) \cap O_1$ et $O_2' = (A \cup B) \cap O_2$ forment une partition de $A \cup B$).
3. Obtenir ce même résultat en considérant les fonctions $f : A \cup B \to \{0,1\}$ continues.
4. Montrer que la conclusion est fausse si on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Exercice 33. Soient $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et $F \subset E$ un fermé. On suppose que E et ∂F sont connexes. Montrer que F est connexe. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose pas F fermé ?

Exercice 34. Soient (X,τ_X) et (Y,τ_Y) deux espaces topologiques connexes, et $A \subset X$, $B \subset Y$ deux sous-ensembles stricts. Montrer que $(A \times B)^c$ est connexe dans $X \times Y$. Qu'en est-il de $A^c \times B^c$?

Exercice 35. Soient $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie ouverte et fermée de E. Montrer que A est réunion de composantes connexes de E.

Exercice 36.

1. Soit A une partie d'un espace topologique (E, τ). On suppose que pour tout x, y dans A, il existe une partie connexe $A_{x,y}$ de A contenant x et y. Montrer que A est connexe.
2. Soient A et B dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une partie connexe H de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui contient A et B. (Indication : construire H à l'aide de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{dét}(\gamma(z)) \neq 0\}$, où $\gamma : z \mapsto zA + (1 - z)B$ pour $z \in \mathbb{C}$).
3. En déduire que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe.
4. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 37. Soient $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{P}$ une partition de E en parties ouvertes et connexes. Montrer que $\mathcal{P}$ est la partition de E en composantes connexes.

Exercice 38. Montrer qu'une application localement constante définie sur un espace connexe est constante.

Exercice 39. Soit $f : S^n \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.
Remarque : Une conséquence de ce résultat est le "théorème de la température" : à tout instant, il existe toujours deux points diamétralement opposés sur Terre où il fait exactement la même température.

4 Compacité

Exercice 40. Preuve du fait que $[0, 1]$ vérifie la propriété de Borel-lebesgue.
Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'ouverts de $\mathbb{R}$ recouvrant $[0, 1]$. Soit

$$A = \{x \in [0, 1] \text{ tel qu' il existe } J \subset I, J \text{ finie vérifiant } [0, x] \subset \cup_{i\in J} O_i\}$$

1. Montrer que A est non vide et admet une borne supérieure que l'on notera a.
2. Montrer que $a \in A$ et que $a = 1$.

Exercice 41. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Montrer qu'il n'existe pas de topologie $\mathcal{T}'$ strictement plus fine que $\mathcal{T}$ telle que $(X, \mathcal{T}')$ est encore compact.

Exercice 42. Soit E un espace topologique séparé, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 43. Soit E un espace topologique compact non vide.

1. Soient F un fermé de E et $a \in E$ n'appartenant pas à F. Montrer qu'il existe des ouverts O, Ω de E tels que $a \in \Omega$, $A \subset O$ et $\Omega \cap O = \emptyset$.
2. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints O_1, O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

Exercice 44. Topologie compacte-ouverte.
Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues. On considère $\mathcal{T}$ la topologie appelé **topologie compacte-ouverte** sur $\mathcal{C}(X, Y)$ engendrée par les ensembles $U_{K,O} = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subset O\}$ avec $O \in \mathcal{T}_Y$ et K une partie compacte de X.

1. Montrer que si Y est métrique et X compact, alors la topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence uniforme.
2. Montrer que si Y est séparé, alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est séparé.
3. On suppose que X est localement compact (X est séparé et chaque point admet un voisinage compact). Montrer que l'application $\mathrm{ev}\colon X \times \mathcal{C}(X, Y) \to Y$ définie par $\mathrm{ev}(x, f) = f(x)$ est continue.