rem: pour tout $a<-1$, on a $\forall x \in]-\infty, a]$, $0 \leq n^x \leq n^a$
et $\left(\sum_{n \geq 1} n^a\right)$ cv. (série de Riemann)

donc sur $]-\infty, a]$, $\left(\sum_{n \geq 1} n^x\right)$ CVN (et aussi CVU).

---

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x$

• si $x \geq 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge

• Pour $x<0$ fixé, la suite $(n^x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0 pour $n \to \infty$
par le critère des séries alternées, $\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^n n^x\right)$ cv

domaine de CVS $D =]-\infty, 0[$

CVN/CVU? Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in D} |(-1)^n n^x| = \sup_{x \in D} n^x$.

$x \mapsto n^x$ est strictement croissante, et $\lim_{x \to 0^-} n^x = 1$

d'où $\sup_{x \in D} n^x = 1$.

Le terme général ne tend pas uniformément vers 0 sur D, donc la convergence de $\left(\sum_{n \geq 1} u_n\right)$ n'est pas uniforme sur D
(donc pas normale non plus)

rem: 1 Sur $]-\infty, a]$ avec $a<-1$, on a
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sup_{x \in]-\infty, a]} |(-1)^n n^x| = n^{-a}$ et $\left(\sum_{n \geq 1} n^{-a}\right)$ cv.
par le critère de Riemann

donc $\left(\sum u_n\right)$ CVN sur $]-\infty, a]$

2 sur $]-\infty, a]$ avec $a \in [-1, 0[$ on n'a pas CVN
(car alors $\left(\sum_{n \geq 1} n^{-a}\right)$ diverge)

mais on a CVU sur $]-\infty, a]$:
$\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-\infty, a]$, on considère le reste
$$R_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n n^x.$$
Par estimation du reste des séries alternées, on a
$$|R_N(x)| \leq |(-1)^N N^x| \leq N^a$$
donc $0 \leq \sup_{]-\infty, a]} R_N \leq N^a$, et $N^a \xrightarrow{N \to \infty} 0$ (car $a<0$)

$\leadsto$ $R_N \xrightarrow[N \to \infty]{CVU} 0$, càd $\left(\sum u_n\right)$ CVU.