Exo 2

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$

pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a par déf $\forall x\in\mathbb{R}$

$$n^x = e^{x\ln(n)}$$

d'où $\frac{d}{dx}\left(e^{x\ln(n)}\right) = \ln(n)e^{x\ln n} = \ln(n)n^x$

qui est >0, d'où

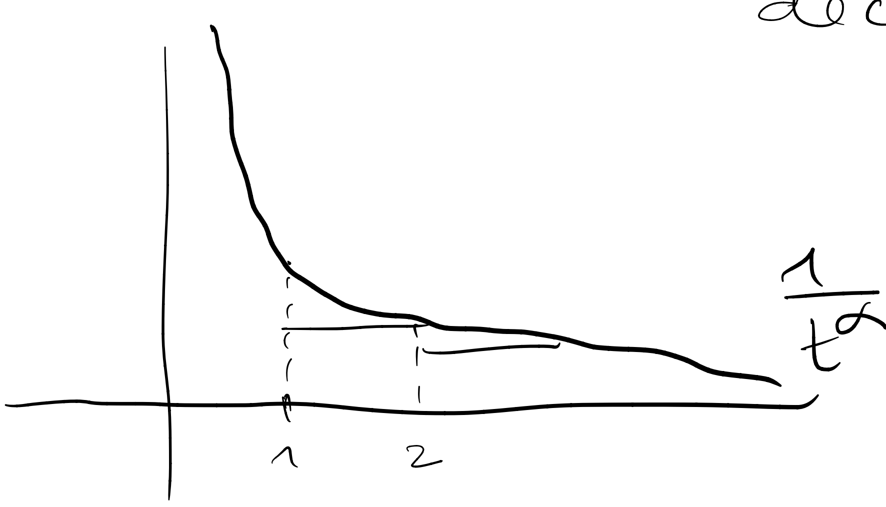
$x\mapsto n^x$

est croissante.

Pour $x\geq -1$, on a $\forall n$, $n^x \geq \frac{1}{n}\geq 0$, et $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\right)$ diverge donc $\left(\sum_{n\geq 1} n^x\right)$ diverge.

Pour $x<-1$, on utilise le fait que $t\longmapsto t^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\left(\frac{d}{dt}t^x = xt^{x-1}<0\right)$



Pour tout $N\geq 2$, on a

$$\sum_{n=2}^{N} n^x \leq \int_1^{N-1} t^x\,dt = \frac{(N-1)^{x+1}}{x+1} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{-1}{x+1}$$

(noter que $x+1<0$).

Ceci implique que $\left(\sum_{n\geq 2} n^x\right)$ converge.

Domaine de CVS pour $\left(\sum_{n\geq 1} n^x\right)$ est donc $D =]-\infty,-1[$

(CVN) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, $\sup_{x\in D}|n^x| = \sup_{x\in D} n^x$

$\forall x\in D$, $n^x \leq n^{-1} = \frac{1}{n}$, d'où $\sup_D |u_n| \leq \frac{1}{n}$

$\forall y\in D$, $n^y \leq \sup_{x\in D} x^n$, donc $\lim_{y\to(-1)^-} n^y = \frac{1}{n} \leq \sup_D |u_n|$

$\sim \boxed{\sup_D |u_n| = \frac{1}{n}}$

$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\right)$ diverge, donc $\left(\sum_{n\geq 1}^{\infty} u_n\right)$ ne cv pas normalement.

(CVU) pour tout $x\in D$, $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $R_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} n^x \underset{(*)}{\geq} \int_N^{\infty} t^x\,dt = -\frac{N^{x+1}}{x+1}$

et $-\frac{N^{x+1}}{x+1} \xrightarrow[x\to(-1)^-]{} +\infty$

(*) grâce à la décroissance de $t\mapsto t^x$

donc $\forall N$, $\sup_D R_N = +\infty$, en particulier $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ ne cv. pas uniformément