L3 Mathématiques avec approfondissements — Université Grenoble Alpes
Topologie — 2024-2025

Feuille d'exercices n°2

1 Espaces métriques

Exercice 1.1. Soit A un ensemble. Montrer que

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur A.

Exercice 1.2. Soit E un ensemble fini. Lorsque A et B sont deux parties de E, on note $A \Delta B$ leur différence symétrique, définie par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, et on pose $d(A,B) = \mathrm{card}(A \Delta B)$. Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de E.

Exercice 1.3. Soit (E,d) un espace métrique.

1. La formule $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b)\ ;\ (a,b) \in A \times B\}$ définit-elle une distance sur l'ensemble des parties non vides de E ?
2. Montrer que pour toutes parties A, B, C de E,

$$\mathrm{dist}(A,C) \leq \mathrm{dist}(A,B) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(B,C).$$

Exercice 1.4. Soit E un ensemble et soient d_1, d_2 des distances sur E.

1. Montrer que $d_3 = d_1 + d_2$ et $d_4 = \max(d_1, d_2)$ sont aussi des distances sur E.
2. Justifier qu'il existe des constantes strictement positives a et b telles que pour tout $x, y \in E$ nous avons que

$$d_3(x,y) \geq a\, d_4(x,y)$$

   et

$$d_4(x,y) \geq b\, d_3(x,y).$$

3. Montrer que $D_1 = \min(d_1, 1)$ est une distance sur E.
4. Soient maintenant $d_1, d_2, \ldots$ une famille dénombrable de distances sur E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la distance $D_n = \min(d_n, 1)$. Justifier que

$$D(x,y) = \sum_n D_n(x,y)/2^n$$

   est une distance sur E.
5. Soit $x \in E$ et (x_m) une suite d'éléments de E. Justifier que $D(x_m, x) \to 0$ si et seulement si $d_n(x_m, x) \to 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.5. Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{Z}^*$. La valuation p-adique de n, notée $\nu_p(n)$, est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On note aussi $\nu_p(0) = +\infty$.

Soit q un nombre rationnel et écrivons $q = a/b$ avec a et b des entiers premiers entre eux. On définit la valuation p-adique de q par

$$\nu_p(q) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, on pose

$$d(q_1, q_2) = p^{-\nu_p(q_1 - q_2)}.$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{Q}$.

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 2.1. Déterminer toutes les normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 2.2. Soient E un espace vectoriel réel et d une distance sur E. Montrer que d provient d'une norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) (invariance par translation) pour tous $x, y, z \in E$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;

(ii) (action des dilatations) pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Exercice 2.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit Φ un ensemble fini de formes linéaires sur E, qui engendre $E^* = L(E, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in E$, on note

$$N(x) = \max\{|\phi(x)| \ ; \ \phi \in \Phi\}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que les normes $|| \cdot ||_\infty$ et $|| \cdot ||_1$ habituelles sur $\mathbb{R}^d$ sont de la forme ci-dessus.
3. On prend $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire canonique et $\Phi = \{\phi_1, \phi_2\}$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont définies par

$$\phi_1(x_1, x_2) = x_1 + (1/2)x_2 \text{ et } \phi_2(x_1, x_2) = (1/2)x_1 - x_2.$$

   Dessiner la boule unité associée à la norme N.

Exercice 2.4. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $p > 0$, on pose :

$$N_p(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)\,.$$

1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que si $p < 1$, N_p n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $p \mapsto N_p(x)$ est décroissante et $N_p(x) \to N_\infty(x)$ quand $p \to +\infty$.
5. Pour $0 < p < q < +\infty$, montrer que $N_q \leq N_p \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} N_q$

Exercice 2.5. (Inégalité de Hölder).

1. Soit $(u_n) \in \ell^3(\mathbb{N})$, donner une condition suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $(\frac{1}{n^\alpha} u_n)$ soit dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
2. Soient $1 \leq p \leq r \leq q$ et soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} |f|^q dx < \infty$. Montrer par deux méthodes différentes que
$$\int_{\mathbb{R}} |f|^r dx < \infty,$$
une fois en utilisant des inégalités entre $|f|^p$, $|f|^r$ et $|f|^q$, et une fois en utilisant l'inégalité de Hölder.

Exercice 2.6. On fixe dans ce qui suit un réel $p > 1$, et on note q l'unique réel tel que $1/p + 1/q = 1$ (on a aussi $q > 1$).

1. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tous $a, b \geq 0$, on a
$$ab \leq a^p/p + b^q/q\,.$$
2. Inégalité de Hölder. Lorsque $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q},$$
avec égalité seulement si x et y sont colinéaires (on pourra utiliser la question précédente avec $a = |x_k|/(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $b = |y_k|/(\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$).
3. En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}.$$
En déduire que l'application $x \mapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
4. Procéder de même en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles (et les sommes par des intégrales).

Exercice 2.7. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme sur E.

3 Espaces préhilbertiens.

Exercice 3.1. Soit E un espace préhilbertien, soit $||\cdot||$ la norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit S la sphère unité. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$||x|| = \sup\{|\langle s, x \rangle)| \ ; s \in S\}.$$

Exercice 3.2. Soit E un espace préhilbertien et $\phi : E \to E$ une application linéaire qui préserve la norme euclidienne. Justifier que ϕ préserve le produit scalaire.

Exercice 3.3. Soient E un espace préhilbertien de dimension finie et F un sous-espace. Soit $x \in E$. Justifier qu'un point $y \in F$ minimise la distance à x si et seulement si $x - y$ est orthogonal à F. Justifier qu'un tel point $y \in F$ existe toujours. En considérant $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, justifier que l'existence du point y n'est pas garantie en dimension infinie.

Exercice 3.4. Soit E un espace préhilbertien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit S la sphère unité de E. Soit (x_n) une suite de points de S tels que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N_\epsilon$ le point z_{nm} au milieu du segment $[x_n x_m]$ satisfait $||z_{nm}|| > 1 - \epsilon$. Justifier que la suite (x_n) est de Cauchy.

Exercice 3.5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ N(x + y)^2 + N(x - y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2.$$

Le but de l'exercice est de montrer que N provient d'un produit scalaire. Pour cela, on pose

$$\forall (x, y) \in E^2, \ b(x, y) = \frac{1}{4}[N(x + y)^2 - N(x - y)^2].$$

1. Montrer que pour tout x et y dans E, $b(x, y) = b(y, x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $b(x, x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.
3. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $b(x + y, z) + b(x - y, z) = 2b(x, z)$.
4. Montrer que pour tout $(x, z) \in E^2$, $b(2x, z) = 2b(x, z)$.
5. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $b(x + y, z) = b(x, z) + b(y, z)$.
6. Soit $(x, z) \in E^2$. Montrer l'égalité $b(\lambda x, z) = \lambda b(x, z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Conclure.

Exercice 3.6. Soit (E, N) un espace vectoriel préhilbertien, C une partie convexe de E et $x \in E$. Montrer que la distance $d(x, C)$ est atteinte en au plus un point.

4 Topologies métriques

Exercice 4.1. 1. Dessiner les boules unités ouvertes de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_3$ et $||\cdot||_\infty$.

2. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace un espace vectoriel réel E. Soit $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Décrire la boule unité de la norme N_3 en termes des boules unités de N_1 et N_2.

Exercice 4.2. Soient $a, b > 0$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x, y) = \sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}\,.$$

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer les meilleures constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ telles $c_1\|.\|_2 \leq N \leq c_2\|.\|_2$.

Exercice 4.3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $||\cdot||$. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^2$, on définit $D(x, y) = ||x - y||$ si x et y sont colinéaires et $D(x, y) = ||x|| + ||y||$ sinon.

1. Montrer que $D(x, y) \geq ||x - y||$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que D est une distance.
2. Décrire géométriquement la boule $B_D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : D(x, y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$ quelconques fixés.
3. La distance D est-elle associée à une norme ?

Exercice 4.4. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 4.5. Donner un exemple d'un espace métrique dans lequel toute boule ouverte est également une boule fermée.

Exercice 4.6. Soit (E, d) un espace métrique. Soit ϕ une application de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que :

(*a*) $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(*b*) ϕ est croissante,
(*c*) $\forall u, v \geq 0,\ \phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$ (on dit que ϕ est sous-additive).

1. Vérifier que l'application $\phi(d) := \phi \circ d$ est une distance sur E. Si d est associée à une norme, est-ce aussi le cas de $\phi(d)$?
2. Montrer que toute fonction concave non nulle $\phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\phi(0) = 0$ vérifie les conditions (a), (b) et (c). En déduire que $d/(1 + d)$, $\min(1, d)$, $\ln(1 + d)$, et d^α pour $0 < \alpha < 1$ sont des distances sur E.

Dans les trois questions suivantes, on suppose que ϕ est continue en 0. Lorsque d est une distance sur E, on note pour $x \in E$ et $r > 0$, $B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

3. Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_{\phi(d)}(x, \phi(r)) \subset B_d(x, r)$.
4. Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que

$$B_d(x, r') \subset B_{\phi(d)}(x, r) .$$

5. En déduire que les distances d et $\phi(d)$ définissent les mêmes ouverts.
6. Lorsque ϕ n'est pas continue en 0, montrer que les boules pour la distance $\phi(d)$ sont des singletons dès que le rayon est suffisamment petit. Dans ce cas, $\phi(d)$ et d définissent-elles les mêmes ouverts ?

5 Suites dans les espaces métriques

Exercice 5.1. Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy de E. Montrer que la suite $(d(a_n, b_n))$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
2. Soit (a_n) une suite de E telle que $\sum d(a_n, a_{n+1}) < \infty$. Montrer que (a_n) est de Cauchy.

Exercice 5.2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par

$$|| \sum a_k X^k || = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N}).$$

On note $P_n = 1 + X + \cdots + \dfrac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy mais ne converge pas. Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on définit

$$\begin{aligned} d_0(P, Q) &= \sup_{x \in [0,1/2]} |P(x) - Q(x)|, \\ d_1(P, Q) &= \int_0^1 |P(x) - Q(x)| \mathrm{d}x, \\ d_2(P, Q) &= \begin{cases} \deg(P - Q) + 1 & \text{si } P \neq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que ce sont des distances sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.
2. Quel est le comportement de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour chacune de ces distances ?
3. Ces distances définissent-elles les mêmes topologies ?
4. Ces distances sont-elles associées à des normes ?

Exercice 5.3. On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. Soit $C = [0, 1] \times [0, 1]$. Est-il vrai que tout élément de C est une limite d'une suite d'éléments dans $\mathbb{Q}^2 \cap C$?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$. Est-il vrai que tout élément de D est la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}^2 \cap D$?

Exercice 5.4. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous f et g dans E, on note

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(|g(k) - f(k)|, 1)\,.$$

1. Montrer que cette formule définit une distance sur E, et que pour cette distance E est borné.
2. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que si pour tout $k \in [0, K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$, alors $d(f,g) \leq 3 \times 2^{-K}$, et si $d(f,g) \leq 2^{-2K}$, alors pour tout $k \in [0, K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$.
3. Montrer que $d(f, f_n) \to 0$ si et seulement si (f_n) converge ponctuellement vers f.
4. Montrer que dans (E, d), toute suite de Cauchy converge. (*On dit que l'espace métrique* (E, d) *est complet*).

Exercice 5.5. Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes par rapport aux normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$:

1. $E =]0, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)^3}$;
2. $E = [0, 1]$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2 - nx & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5.6. On considère $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme $||\cdot||_\infty$. Construire une suite de fonctions $f_n \in E$ qui converge par rapport à la norme $||\cdot||_\infty$ vers une fonction continue mais non dérivable. Montrer que si on munit E de la norme $S(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ alors toute suite de Cauchy de E converge vers un élément de E.

Exercice 5.7. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant par rapport à la norme $||\cdot||_1$ vers f définie par $f(x) = 1/\sqrt{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Peut-on avoir une telle convergence avec la norme $||\cdot||_\infty$?

Exercice 5.8. Soit E l'ensemble des suites réelles bornées. Soient A l'ensemble des suites qui convergent vers 0 et B l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang.

1. On munit E de la norme $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   a) Montrer que A est fermé dans E.
   b) Montrer que B est dense dans A. Est-il dense dans E ?
2. Montrer que, pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace B est un sous-espace vectoriel de $\ell^p(\mathbb{N})$ qui n'est pas fermé. Pour chaque p, caractériser dans $\ell^p(\mathbb{N})$ les points qui sont la limite d'une suite d'éléments de B.

Exercice 5.9. Soit $X =]0, +\infty[$ et, pour $i = 0, 1, 2$, soit $d_i \colon X \times X \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x, y \in X$ par $d_0(x, y) = |x - y|$, $d_1(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, $d_2(x, y) = |x - y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

1. Montrer que d_1, d_2 définissent des distances sur X.
2. Pour $i = 0, 1, 2$, l'espace métrique (X, d_i) est-il complet ?

Exercice 5.10. Soit (E, d) un espace métrique complet.

1. Si a est un point de E, à quelle condition $(E \setminus \{a\}, d)$ est-il encore complet ?
2. Pour $x, y \in E \setminus \{a\}$, on définit d_a par

$$d_a(x, y) = d(x, y) + \left|\frac{1}{d(x, a)} - \frac{1}{d(y, a)}\right|.$$

   Vérifier que d_a est une distance sur $E \setminus \{a\}$ et que $(E \setminus \{a\}, d_a)$ est complet.

Exercice 5.11. Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 5.12 (Complété d'un espace métrique)**.** Soit (E, d) un espace métrique.

1. On dit que deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0\,.$$

   Montrer que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de Cauchy de (E, d).
2. On note E^* l'ensemble des classes d'équivalence. On pose, si $A \in E^*$ est représenté par (a_n) et $B \in E^*$ par (b_n),

$$\Delta(A, B) = \lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n).$$

   Montrer que Δ définit une distance sur E^*.
3. Montrer que (E^*, Δ) est complet.
4. Pour $a \in E$, on note A_a l'élément de E^* représenté par $(a_n) = (a)$. Montrer que $\phi(a) = A_a$ définit une isométrie de (E, d) dans (E^*, Δ).
5. Montrer que $\phi(E)$ est dense dans E^*. On identifie E à $\phi(E)$ et on appelle E^* le *complété* de E.

6 Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Exercice 6.1. On considère l'espace $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni des normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\, dx\right)^{1/2}$$

1. $(E, \| \ \|_\infty)$ est-il complet ?
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ telle que
   — $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, 4^{-n}]$,
   — $f_n(x) = 4^n x - 1$ pour $x \in [4^{-n}, 2 \cdot 4^{-n}]$,
   — $f_n(x) = 3 - 4^n x$ pour $x \in [2 \cdot 4^{-n}, 3 \cdot 4^{-n}]$,
   — $f_n(x) = 0$ pour $x \in [3 \cdot 4^{-n}, 1]$.
   Étudier la convergence ponctuelle de la série de fonctions $\sum f_n$ et la convergence de $\sum \|f_n\|_2$. L'espace $(E, \| \ \|_2)$ est-il complet ?
3. On considère dans E la suite de fonctions g_n telles que $g_n(x) = \cos(2\pi n x)$. Calculer $\|g_p - g_q\|_2$ pour tous p et q. La suite (g_n) possède-t-elle des valeurs d'adhérence dans $(E, \| \ \|_2)$? dans $(E, \| \ \|_\infty)$?

Exercice 6.2 (Autour du théorème de Picard)**.** Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ ayant une itérée f^p contractante. Montrer que

1. f possède un et un seul point fixe, noté a.
2. Pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 6.3. Soit $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\phi(x)).$$

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ ||_\infty$ et $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où

$$g(x) = \alpha + \int_0^x f(\phi(t)) \ dt.$$

Montrer que T^2 est contractante. Utiliser l'exercice 6.2 et conclure.

Exercice 6.4. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ ||_\infty$. Pour toute fonction f de E, on définit $T(f)$ par

$$\forall t \in [0, 1], \qquad T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x u f(u) du \right) dx.$$

Montrer que T est bien définie, puis qu'elle est contractante. En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - t f(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$.

Exercice 6.5. Évaluer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \ dx.$$

Exercice 6.6. Soit E l'espace de suites (u_n) nulles sauf en un nombre fini de termes, muni du produit scalaire usuel.

1. Montrer que $\phi : (u_n) \mapsto \sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{n}$ est une forme linéaire continue sur E.
2. Existe-t-il un élément $a \in E$ tel que $\phi(u) = \langle a, u \rangle$ pour tout u. Que peut-on déduire sur E ?

Exercice 6.7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel. Soit

$$C = \{f \in E; f(0) = 0\}.$$

Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Commenter.

Exercice 6.8. Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $p : H \to H$ un endomorphisme continu tel que $p \circ p = p$.

1. Demontrer que H s'écrit comme somme directe de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
2. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est 1-Lipschitzien.

Exercice 6.9. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormale de H peut se compléter en une base orthonormale.

Exercice 6.10. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Calculer la projection sur la boule unité fermée. Démontrer que tout convexe fermé admet un unique élément de norme minimale.

Exercice 6.11. Soit $H = l^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire canonique. On note

$$C = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé et calculer la projection orthogonale sur C.

Exercice 6.12. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer de deux façons différentes que le supremum définissant la norme triple $|||f|||$ est atteint en un point x de la boule unité de H :

1. en utilisant le théorème de Riesz ;
2. en montrant que toute suite (x_n) de la boule unité telle que $f(x_n) \to |||f|||$ est de Cauchy.

Exercice 6.13. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé et borné dans H. On note P_C la projection orthogonale de H sur C. Justifier que pour tout $c \in C$ on a que $\langle x - P_C(x), c - P_C(x) \rangle \rangle \leq 0$.

Exercice 6.14. Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de convexes fermés d'un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tels que $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$. On pose $C_\infty = \cap_n C_n$ et on suppose $C_\infty \neq \emptyset$. On note P_i la projection sur le convexe fermé C_i.

1. Montrer que C_∞ est un convexe fermé.
   On note P_∞ la projection sur le convexe C_∞.
2. Pour tout $h \in H$, on pose $a_i = P_i(h)$. Montrer que la suite $(||h - a_i||)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.
3. Montrer que la suite (a_i) est de Cauchy. (On utilisera l'identité du parallélogramme sur les vecteurs $h - a_i$ et $h - a_j$.)
4. Montrer que $a_i \to P_\infty(h)$ quand $i \to \infty$.

Exercice 6.15. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, soit C un convexe fermé non vide de H et soit $x \in H$ un point qui n'est pas dans C.

1. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé de H qui sépare x et C. (Un hyperplan fermé dans un espace vectoriel normé est un ensemble donné par une équation de la forme $f(y) = \alpha$ où f est une forme linéaire continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.) On pourra considérer la bissectrice du segment reliant x et y, la projection orthogonale de x sur C.
2. En déduire que tout convexe fermé propre s'écrit comme une intersection de demi-espaces fermés.
3. Demontrer que tout sous-espace vectoriel strict s'écrit comme intersection d'hyperplans fermés.

Exercice 6.16. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. Soit a une forme bilinéaire symétrique continue qui est coercive, c'est-à-dire qu'il existe α et β positifs tels que pour tout $x \in H$

$$\alpha||x||^2 \leq a(x,x) \leq \beta||x||^2.$$

Soit L une forme linéaire continue sur H et soit E l'énergie $E(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$.

1. Montrer que a est un produit scalaire sur H et en déduire qu'il existe v telle que $L(x) = a(x,v)$ pour tout x.
2. Soit u la projection orthgonale de v sur C pour le produit scalaire a. Montrer que u est l'unique vecteur minimisant E dans C.

7 Fonctions continues

Exercice 7.1. Soit X un espace métrique. Montrer que le graphe d'une application continue $f : X \to X$ est fermé dans $X \times X$. La réciproque est-elle vraie : si le graphe de f est fermé alors f est continue ?

Exercice 7.2. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et u un vecteur unitaire de E. On note H l'hyperplan affine d'équation $\langle u, x\rangle = 1$ et S la sphère de diamètre $[0,u]$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{inv}(x) = \|x\|^{-2}x$.

1. Que vaut $\|\mathrm{inv}(x)\|$?
2. Montrer que inv est une involution de $E \setminus \{0\}$.
3. Montrer que $\mathrm{inv}(H) = S \setminus \{0\}$.
4. Montrer que pour tout x et y dans H, $\|\mathrm{inv}(x) - \mathrm{inv}(y)\| = \|x\|^{-1}\|y\|^{-1}\|x-y\|$. En déduire que inv est continue sur $E \setminus \{0\}$.

Exercice 7.3. Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et ψ une forme linéaire non nulle sur E. On note $H = \mathrm{Ker}(\psi)$.

1. Montrer que pour tout $y \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}y$.
2. Montrer que si ψ n'est pas continue, alors H est dense dans E. Qu'en est-il si ψ est continue ?

Exercice 7.4. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et D l'endomorphisme de dérivation.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu. On pourra considérer les applications $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$.
2. Soit F le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ soit continu.

Exercice 7.5. On considère l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour quelles suites (a_n) la fonction définie sur E par

$$f((u_n)) = (a_n u_n)$$

est

— à image dans E ?
— à image dans E et continue ?
— à image dans E et continue avec inverse continue ?

8 Compacité

Exercice 8.1. Les espaces suivants sont-ils compacts ? On prendra la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et la topologie induite sur les parties de $\mathbb{R}^n$ (de même pour les parties de $M_n(\mathbb{R})$, via l'identification standard $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$).

1. le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
2. la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$.
3. l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y \geq 0\}$.
4. l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y > 0\}$.
5. l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in]0,1]\} \cup \{(0,x) \mid x \in [-1,1]\}$.
6. $GL_n(\mathbb{R})$.
7. le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n.
8. l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont les valeurs propres sont dans $[-1,1]$.

Exercice 8.2. Soit $P(z)$ un polynôme non constant à coefficients réels ou complexes. On se propose de montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. En utilisant le fait que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, montrer que $|P|$ atteint son minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Si $P(z_0) \neq 0$, obtenir une contradiction en montrant à l'aide d'un développement de la forme $Q(h) = 1 + ch^m + O(h^{m+1})$, où $m \geq 1$ et $c \neq 0$, que le polynôme $Q(h) = P(z_0+h)/P(z_0)$ prend des valeurs $|Q(h)| < 1$ pour certains $h = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ proches de 0.

Nota : cette première preuve historique convaincante publiée en 1814 est due à Jean-Robert Argand, de nationalité suisse, libraire à Paris et mathématicien amateur (! !)).

Exercice 8.3. Soient (E,d) un espace métrique et A une partie compacte de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x,A)$ est atteinte.
2. Soit B un fermé tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $d(A,B) > 0$ où $d(A,B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a,b)$. Donner un contre-exemple lorsque A est seulement supposé fermé.
3. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (on pourra considérer $\{x \in E \mid d(x,A) < \epsilon\}$). Ceci reste-t-il vrai pour A fermé quelconque ?
4. Soit B un compact. Montrer qu'il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $d(A,B) = d(a,b)$.

Exercice 8.4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient A et B deux parties de E. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé. Est-ce toujours vrai si on suppose seulement A et B fermés ?

Exercice 8.5. Soient E un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 8.6. Soit (E,d) un espace métrique tel que pour tout $x \in E$ et tout $r \geq 0$ la boule fermée de centre x et de rayon r est compacte. Montrer que les parties compactes de E sont les sous-ensembles fermés bornés.

Exercice 8.7. Soit A une partie fermée et non bornée de $\mathbb{R}^n$ munie de la distance usuelle. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $(x \in A)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \mid f(x) \leq k\}$ est compact.
2. Montrer que $f_{|A}$ est minorée et qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf f(A) = f(a)$.

Exercice 8.8. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$ munie de la norme euclidienne. Soit C l'enveloppe convexe de K, c'est-à-dire le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant K. On suppose connu le **théorème de Carathéodory** (qui est vrai même si K n'est pas compact) : C est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de $n+1$ points de K, c'est-à-dire

$$C = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i k_i \mid k_i \in K,\ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Montrer que C est compact.

Exercice 8.9. Soient X et Y des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et $G \subset X \times Y$ le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Montrer que si Y est compact et G est fermé dans $X \times Y$, alors f est continue.

Exercice 8.10. Soient (E,d) un espace métrique et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de E. On pose $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que K est non vide.
2. Montrer que pour tout ouvert U contenant K, il existe $n \geq 0$ tel que $K_n \subset U$.
3. Si (x_n) est une suite de points de K_n possédant une limite $x = \lim x_n \in E$, alors $x \in K$.
4. Soient (E, d) un espace métrique compact (non vide !) et $f : E \to E$ une application continue. On pose $K_n = f^n(E)$ où f^n est l'itérée n-ième de f. Montrer que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est non vide et que $f(K) = K$.

Exercice 8.11. Soient (E, d) un espace métrique compact et $f \colon E \to E$ telle que pour tout $x, y \in E$ avec $x \neq y$ on ait $d\,(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe [pour l'existence, on pourra considérer l'inf de la fonction $u(x) = d(x, f(x))$].
2. Par l'exercice précédent, l'intersection $K = \bigcap f^n(E)$ est non vide et telle que $f(K) = K$. Par une considération de diamètre, vérifier que la partie K est réduite à un seul point, et retrouver ainsi le résultat de 1).
3. Le point initial $x_0 \in E$ étant fixé, quel est le comportement de $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$?

Exercice 8.12. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$, resp. $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), || \cdot ||_p)$, n'est pas compacte. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout $(b_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, l'ensemble

$$K \; = \; \{(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \mid |u_n| \leq |b_n|\}$$

est un compact de $\ell^p(\mathbb{N})$. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 8.13. Soit $\ell^1(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |u_n| < \infty\}$ muni de la norme $\|u\| = \sum_{n \geq 0} |u_n|$.

1. Montrer que $A = \displaystyle\prod_{n \geq 0} [0, 2^{-n}]$ est une partie compacte de $l^1(\mathbb{R})$.
2. Soit $B = \{(u_n) \in l^1(\mathbb{N}); \|u\| = 1\}$. Montrer que B n'est pas compact.

9 Homéomorphimes.

Exercice 9.1. Soient $C :]-1, 1[\times]-1, 1[$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Existe-t-il un homéomorphisme $B \to \mathbb{R}^2$? un homéomorphisme $C \to B$?

Exercice 9.2. Quelles propriétés sont transportées par un homéomorphisme $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$?

(i) (u_n) est une suite convergente de (X, d_X).

(ii) (u_n) est une suite bornée de (X, d_X).

(iii) (u_n) est une suite de Cauchy de (X, d_X).

(iv) $A \subset X$ est une partie dense de (X, d_X).

Mêmes questions avec une application bi-lipschitzienne.

Exercice 9.3. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une bijection. On définit une distance f^*d sur X (*tirée en arrière de d par f*) en posant

$$f^*d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

1. Montrer que d et f^*d sont topologiquement équivalentes ssi f est un homéomorphisme.
2. Montrer que d et f^*d sont équivalentes ssi f est bi-lipschitzienne.

Exercice 9.4. Soit $f : (\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty) \to (\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$ une application bijective et continue. On suppose que

$$\lim_{\|x\|_\infty \to +\infty} \|f(x)\|_\infty = +\infty,$$

montrer que f est un homéomorphisme.

10 Applications linéaires continues.

Exercice 10.1. Si $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on définit, pour toute matrice réelle A de taille $n \times n$,

$$|||A||| = \mathrm{Sup}_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Montrer que $||| \cdot |||$ est une norme sur l'espace des matrices réelles $n \times n$, qui vérifie de plus, pour toutes telles matrices A et B : $|||AB||| \leq |||A||| \; |||B|||$.

Exercice 10.2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 des normes sur E. Montrer que N_1 et N_2 induisent la même topologie sur E si et seulement si elles sont équivalentes. Est-ce le cas pour des distances ? i.e. si d_1 et d_2 sont deux distances sur un ensemble X induisant la même topologie, existe-t-il $C > 0$ tel que $C^{-1}d_1 \leq d_2 \leq Cd_1$?

Exercice 10.3. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Pour $s \in [a, b]$ fixé, on définit $\delta_s : E \mapsto \mathbb{R}$, par $\delta_s(f) = f(s)$. L'application δ_s est une forme linéaire sur E, appelée *mesure de Dirac au point s* ou *fonctionnelle évaluation en s*.

1. Etudier la continuité de δ_s, lorsque E est muni de $\| \cdot \|_\infty$ ou $\| \cdot \|_1$.
2. Même question pour $s \mapsto \delta_s$, lorsque E^* est muni de la norme triple associée.

Exercice 10.4. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)$ bornées, et F l'ensemble des suites u telles que $\sum |u_n|$ converge. On fixe $a \in E$, et on considère l'application $f : E \to E$ qui envoie u sur $au = (a_n u_n)_n$.

1. Montrer que f est une application linéaire continue, et calculer sa norme triple par rapport à la norme $|| \cdot ||_\infty$.
2. Montrer que $f(F) \subset F$, et calculer la norme de la restriction $f_{|F}$ quand on prend la norme $|| \; ||_1$ sur F.

Exercice 10.5. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme et qu'elle soit équivalente à la norme infinie.

Exercice 10.6. Soient p et q des nombres réels tels que $1 \leq q < p \leq +\infty$. Est-ce qu'il y a une inclusion entre $\ell^q(\mathbb{N})$ et $\ell^q(\mathbb{N})$? Entre $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_q(\mathbb{R})$? Entre $\mathcal{C}_p([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_q([0,1])$? Démonstration ou contre-exemple. Lorsqu'une telle inclusion existe, l'inclusion est-elle continue ?

Exercice 10.7. Soit $\phi : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique suite $(v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ nous avons que

$$\phi((u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Exercice 10.8. Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que pour tout $\rho \in X$,

$$f \ : \ u \in X \ \longmapsto \ \int_0^1 \rho(t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire continue. Montrer que ce n'est plus vrai pour $\rho(t) = 1/\sqrt{t}$.

Exercice 10.9. Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts dense dans $[0,1]$. On considère la forme linéaire

$$f \ : \ u \in X \ \longmapsto \ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2)^{-n} u(q_n) \ .$$

Montrer qu'elle est bien définie et continue sur X. Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est jamais atteinte sur la boule unité de X.

Exercice 10.10. On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

1. Construire une norme sur E pour laquelle l'application $f \to f'$ est une application continue vers $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (munie d'une norme de votre choix).
2. Plus généralement, étant donné une application linéaire $\phi : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés, munis des normes N_E et N_F, construire une norme N'_E sur E telle que ϕ est continue par rapport aux normes N'_E et N_F.

Exercice 10.11. Soient $p, q > 1$ des exposants réels conjugués, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que l'application

$$\phi : g \to \left(f \to \int_0^1 f(x)g(x)dx \right)$$

est une application bien définie $\phi : \mathcal{C}_p([0,1]) \to \mathcal{C}_q([0,1])^*$. Calculer $||\phi(g)||$ pour tout g et montrer que l'image de ϕ est fermée.