L3 Mathématiques avec approfondissements — Université Grenoble Alpes
Topologie — 2024-2025

Feuille d'exercices n°1

1 Corps des réels

Exercice 1. On travaille dans cet exercice sur $\mathbb{R}$. L'expression "pour tout $t > 0$" signifiera donc "pour tout réel $t > 0$". Déterminer les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall t > 0, |x| \leq t\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, |x| \leq t\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : \forall t > 0, |x| < t\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : \forall t \geq 0, |x| < t\}$

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.
4. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, en notant $A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$.

Exercice 3. Soient f et g deux applications d'un ensemble E non vide dans $\mathbb{R}$. On note

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) = \sup\{f(x), x \in E\}.$$

1. Montrer que $\sup_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g$.
2. Si g est minorée, montrer que $\sup_E (f + g) \geq \sup_E f + \inf_E g$.
3. Montrer que si pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\sup_E f \leqslant \sup_E g$

Exercice 4. Soient A et B deux ensembles non vides et f une application de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} f(x, y) = \sup_{x \in A} \big(\sup_{y \in B} f(x, y)\big) = \sup_{y \in B} \big(\sup_{x \in A} f(x, y)\big),$$

$$\sup_{x \in A} \big(\inf_{y \in B} f(x, y)\big) \leqslant \inf_{y \in B} \big(\sup_{x \in A} f(x, y)\big)$$

et que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 5. (Sous groupes additifs de $\mathbb{R}$)
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $P = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\omega = \inf P$.

1. Montrer que P est non vide. Qu'en déduit-on pour ω ?
2. On suppose que $\omega > 0$. Montrer que $G = \omega\mathbb{Z} = \{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
3. On suppose $\omega = 0$. Montrer que pour tout $a < b$, il existe $g \in G$ tel que $a < g < b$. (On dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).
4. Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$. Déterminer $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$. Montrer les résultats suivants.
   $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < n + m\alpha < \varepsilon$.
   $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   Pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < \cos n < b$.
   Pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < \sin n < b$.

Exercice 6. Donner la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est convexe si pour tout $a, b \in E$, $[a, b] \subset E$.
Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 7. (Exemples)

1. Déterminer le sup et l'inf de $x^{1/x}$ pour x parcourant $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, et $\mathbb{N}^*$.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{Q}} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.
3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}} f' = \sup_{x \neq y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Exercice 8. Soient $a_1 < \cdots < a_n$, n nombres réels.
Quelle est la borne inférieure de $\{\sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \ , x \in \mathbb{R}\}$?
Quelle est la borne inférieure de $\{\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \ , x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 9.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée sur un intervalle ouvert non vide I. En utilisant la borne supérieure M de l'ensemble $f(I)$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in I$ et $\eta > 0$ tels que
$$|h| < \eta \;\Rightarrow\; f(a+h) - f(a) < \epsilon$$
Que peut-on dire si f est minorée sur un intervalle ouvert non vide ?
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété d'addivité
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Montrer que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée alors f est continue sur $\mathbb{R}$. De quelle forme est alors f ?

Remarque : Avec l'axiome du choix on peut construire des fonctions additives discontinues.

Exercice 10. (Un théorème de point fixe) Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante (pas forcément continue). On considère $\Omega = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que Ω est non vide et qu'il admet une borne supérieure $\omega \in [0,1]$.
2. Montrer que $f(\omega) \geq \omega$.
3. Montrer que $f(\omega) \leq \omega$.
4. En conclure que f admet un point fixe (i.e. il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$).

2 Suites réelles

Exercice 11. Déterminer toutes les implications vraies entre deux propriétés parmi les propriétés suivantes des suites réelles :

1. croissante
2. croissante à partir d'un certain rang
3. strictement croissante
4. strictement croissante à partir d'un certain rang
5. majorée
6. majorée à partir d'un certain rang
7. minorée
8. périodique à partir d'un certain rang
9. convergente

Donner une suite réelle qui ne possède aucune des propriétés ci-dessus.

Exercice 12. On considère les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de rationnels définies par

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}\,.$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et convergent vers e.
2. En utilisant l'encadrement $a_n < e < b_n$, qui est vérifié pour tout n, déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 13. Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle ne tendant pas vers l. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) tels que, pour tout n, on ait $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| > \varepsilon$.

Exercice 14. Soit (x_n) une suite bornée de réels. Soit m un réel.

1. Montrer que si $x_n \leqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup x_n \leqslant m$.
2. Montrer que si $\limsup x_n > m$, alors $x_n > m$ pour une infinité de n.
3. Montrer que si $\limsup x_n < m$, alors $x_n < m$ à partir d'un certain rang.

Exercice 15. Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles bornées.

1. Montrer que si la borne $\sup_n x_n$ n'est pas atteinte, alors $\limsup x_n = \sup x_n$.
2. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n$$
$$\limsup x_n + \liminf y_n \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

   Qu'en déduit-on si la suite (y_n) converge ?

Exercice 16. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure des suites ci-dessous.

1. $u_n = (-1)^{n^2}$
2. $u_n = \cos(n)$
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
4. $u_n = n\cos(n)$
5. $u_n = \frac{1}{\sin(n)}$
6. $u_n = \frac{3+n^2+2n}{n(n-\cos n)}$
7. $u_n = \begin{cases} (-1)^p \ si \ n = 2p \\ \sin(p) \ si \ n = 2p+1 \end{cases}$

Exercice 17. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ est divergente (on pourra considérer $u_{2n} - u_n$ et utiliser la notion de suite de Cauchy).

Exercice 18. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^\star$ sur lui-même. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$? (on pourra utiliser la notion de suite de Cauchy)

Exercice 19. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. Montrer l'équivalence entre

1. $(x_n)_{n \geqslant 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. $(x_n)_{n \geqslant 0}$ n'a pas de sous-suite bornée.
3. $|x_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 20. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $y_n = x_{2n}$ et $z_n = x_{2n+1}$. On note respectivement A, B, C l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \geqslant 0}$, $(y_n)_{n \geqslant 0}$, $(z_n)_{n \geqslant 0}$. Trouver une relation entre A, B et C. En déduire une expression de $\limsup x_n$ en fonction de $\limsup y_n$ et $\limsup z_n$.

Exercice 21. Donner un exemple de suite réelle :

1. sans valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$).
2. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est F, où F est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ fixée.
3. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{N}$.
4. avec une seule valeur d'adhérence, mais divergente.
5. dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 22. Soit $(r_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de rationnels énumérant $\mathbb{Q}$ (autrement dit, l'application $n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$). Quelles sont les valeurs d'adhérence de $(r_n)_{n \geqslant 0}$?

Exercice 23. Montrer que si deux suites réelles bornées (u_n) et (v_n) sont telles que $(u_n - v_n)$ converge vers 0 alors elles ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 24. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si pour toute sous-suite $(y_n)_n$ de $(x_n)_n$, la suite $(y_n - x_n)_n$ tend vers 0.
En déduire que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, alors :

— $(x_n)_n$ a au plus une valeur d'adhérence.
— si $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence, elle converge.

Exercice 25. Soient (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Déterminer lesquelles des assertions suivantes sont toujours vraies.

1. $u_n \in A$ à partir d'un certain rang.
2. Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Tout segment ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.
4. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \varepsilon$.
5. Si A est borné, alors (u_n) est bornée.
6. Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
7. Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors $\liminf v_n = \liminf u_n$
8. Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors toute valeur d'adhérence de (v_n) est dans A.
9. Si (v_n) est une suite extraite de (u_n) et si A est un singleton $\{\ell\}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de (v_n).
10. Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Exercice 26. Soient (u_n) une suite réelle et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, si pour tout k, λ_k est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il en est de même de λ.

Exercice 27. Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) est un intervalle.

Exercice 28. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}$.

1. Soit $m \geqslant 1$ fixé. Montrer que $\limsup u_n^{1/n} \leq u_m^{1/m}$. Indication : utiliser la division euclidienne de n par m.
2. Montrer que la suite $(u_n^{1/n})$ converge vers $\inf_{m\geqslant 1} u_m^{1/m}$.
3. Application : Si A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, montrez que $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{m\geqslant 1} \|A^m\|^{1/m}$.

Exercice 29. Déterminez les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ réelles bornées telle que $(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2})_{n\geq 0}$ converge.

3 Autour des développements décimaux

Exercice 30. Développement en base B
On fixe un entier $B \geqslant 2$. On note E l'ensemble des suites d'entiers à valeurs dans $\{0, \ldots, B-1\}$, indexées par $\mathbb{N}^*$. On note F le sous-ensemble obtenu à partir de E en retirant les suites qui valent $B-1$ à partir d'un certain rang.
Si $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$ et $b = (b_n)_{n \geqslant 1}$ sont deux suites de E, on dit que $a < b$ si les suites a et b diffèrent en au moins un indice et si pour l'entier $m = \min\{n \geqslant 1 : a_n \neq b_n\}$, on a $a_m < b_m$. On dit que $a \leqslant b$ si $a < b$ ou $a = b$.

1. Montrer que la relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre total sur E. Cet ordre s'appelle ordre lexicographique.
2. Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 1} \in E$. Montrer que la série de terme général a_n/B^n converge et que sa somme, notée $S(a)$ est dans $[0, 1]$.
3. Montrer que l'application S ainsi définie de E dans $[0, 1]$ est croissante, lorsqu'on munit E de l'ordre lexicographique. Est-elle strictement croissante ?
4. Montrer que la restriction de S à F est strictement croissante.
5. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la suite $a = (a_n)_{n \geqslant 1}$ où $a_n = [B^n x] - B[B^{n-1}x]$ est dans F et qu'elle vérifie $S(a) = x$. L'écriture
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{B^n}$$
s'appelle développement en base B du réel x.
6. En déduire que S induit une bijection de F vers $[0, 1[$.
7. Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de $[0, 1[$ et $x \in [0, 1[$.
On note $a_{(n)} = (a_{n,k})_{k \geq 1}$ l'élément de F tel que $S(a_{(n)}) = x_n$ et a l'élément de F tel que $S(a) = x$.
Montrer que si pour tout $k \geq 1$, la suite $(a_{n,k})_{n \geq 1}$ tend vers a_k, alors la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ tend vers x.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 31. (Exemples)

1. Calculer le développement décimal de $13/7$.
2. Calculer $0,454545 \cdots + 0,565656 \cdots$.

Exercice 32. Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$. Si $0, a_1 a_2 \cdots$ est le développement décimal d'un nombre $x \in [0, 1[$, on note $f(x)$ le réel dont un développement décimal est $0, a_{q_1} a_{q_2} \cdots$. Étudier la continuité à gauche et à droite de f

Exercice 33. Montrer que tout rationnel r de l'intervalle $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique

$$r = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!},$$

où $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite d'entiers vérifiant $0 \leq a_n \leq n-1$ pour tout $n \geqslant 2$ et $a_n = 0$ à partir d'un certain rang.
Mettre sous cette forme le rationnel $5/7$.

Exercice 34. Soit S l'ensemble des suites croissantes d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}$$

   est convergente et que sa limite appartient à $]0,1]$.
2. Montrer que l'application de S dans $]0,1]$ qui à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ associe $\lim x_n$ est une bijection.
3. Montrer que $\lim x_n$ est rationnel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq k \quad q_n = q_k$$

4 Dénombrabilité

Exercice 35. Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 36. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : X \to \{0,1\}$ est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 37.
1. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ et les intervalles $[0,1]$ et $]0,1[$ sont équipotents. On pourra utiliser le théorème de Cantor-Bernstein : Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors A et B sont équipotents.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.
3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. En déduire que $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice 38. Soient E et F deux ensembles. Montrer que l'existence d'une injection de E dans F équivaut à l'existence d'une surjection de F dans E. Remarque : la preuve d'une des implications utilise l'axiome du choix.

Exercice 39. Pour X un ensemble quelconque on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

1. Est-ce qu'il existe une application injective de X dans $\mathcal{P}(X)$?
2. Est-ce qu'il existe une application surjective $f : X \to \mathcal{P}(X)$?
   Indication : raisonner par l'absurde, et considérer le sous-ensemble $E = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
3. Est-ce qu'il existe un ensemble X pour lequel X et $\mathcal{P}(X)$ sont équipotents ?

Exercice 40.

1. Soient A un ensemble et $S \subset A$ une partie telle qu'il existe une injection $u : A \to S$. On pose $C_0 = A \setminus S$, $C_n = u^n(C_0)$ et $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Montrer que les ensembles C_n sont 2 à 2 disjoints, et que l'application $f : A \to A$ telle que $f(x) = u(x)$ pour $x \in C$ et $f(x) = x$ pour $x \in A \setminus C$ est une bijection de A sur S.
2. Déduire de ce qui précède le théorème de Cantor-Bernstein :
   Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors A et B sont équipotents.

Exercice 41. Montrer que si A n'est pas dénombrable et $B \subset A$ est dénombrable, alors A et $A\setminus B$ sont équipotents. En déduire que les nombres réels et les irrationnels sont en bijection.

Exercice 42. [Points de discontinuité des fonction monotones]
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche, notée $f(x-)$, et une limite à droite, notée $f(x+)$.
2. En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, f est continue. Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$.
3. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+) - f(x_i-) \leq f(b) - f(a).$$
4. Montrer que l'ensemble des points de $[a, b]$ où f est discontinue est au plus dénombrable.
5. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$ est dénombrable.

5 Fonctions réelles

Exercice 43. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite (u_n) possède une unique valeur d'adhérence ℓ. Le but de l'exercice est de montrer que (u_n) converge vers ℓ.

1. Montrez que $f(\ell) = \ell$.
2. Montrer qu'il existe $\delta \in]0,1]$ tel que $f(]\ell-\delta, \ell+\delta[) \subset]\ell-1, \ell+1[$.
3. Montrer qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $u_n \notin [\ell-1, \ell-\delta] \cup [\ell+\delta, \ell+1]$.
4. Montrer qu'il existe $N_2 \geqslant N_1$ tel que $u_{N_2} \in]\ell-\delta, \ell+\delta[$.
5. Montrer que pour tout $n \geqslant N_2$, $u_n \in]\ell-\delta, \ell+\delta[$, et conclure.

Exercice 44. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels à valeurs dans un segment $[a,b]$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est $f(A)$.

Exercice 45. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$;
2. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \inf(n, \ln(x))$;
3. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;
4. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$;
5. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n}$;
6. $E = \mathbb{R}$, $f_n(x) = g(x-n)$ où $g(x) = 1-|x|$ si $|x| \leq 1$ et $g(x) = 0$ sinon ;
7. $E = [0,1]$, $f_n(x) = n^2x$ si $x \leq 1/n$, $f_n(x) = n - n^2(x-1/n)$ si $1/n \leq x \leq 2/n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

Exercice 46. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 47. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction continue que l'on supposera bornée. A-t-on forcément que $f_n = f(\cdot - \frac{1}{n})$ converge uniformément vers f ? Donner une condition suffisante sur f pour que cela ait lieu.

Exercice 48. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $E \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur E.
2. Si les fonctions f_n et g_n sont bornées, montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément sur E.
3. Montrer que le résultat de la question précédente devient faux sans l'hypothèse de bornitude.

Exercice 49. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue sur $[a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ ayant une limite l, $(f_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. Indication pour le sens difficile : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[a, b]$, montrer qu'on peut choisir ε et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a, b]$ tels que $|f_n(u_n) - f(u_n)| > \varepsilon$ pour une infinité de n. À partir d'une sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in [a, b]$, construire une suite convergente (v_n) telle que $|f_n(v_n) - f(v_n)| > \varepsilon$ pour une infinité de n.

Exercice 50. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge uniformément sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$, alors (f_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Indication : utiliser le critère de Cauchy uniforme.

Exercice 51. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. Montrer que $\int_a^b f_n(t)\, dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\, dt$.

Exercice 52.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose que la suite des dérivées converge uniformément sur $[a, b]$ vers g, et que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour un $x_0 \in [a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $f' = g$.
2. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, mais sans que la suite des dérivées converge vers f'.