Revêtement universel.

Soit X un espace topo séparé, connexe par arcs, localement simplement connexe.

(par ex : une surface de Riemann connexe).

Un revêtement $\tilde{X} \to X$ est dit <u>universel</u> $\tilde{X}$ est connexe par arcs et $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$.

<u>Théorème</u> : Sous les hypothèses ci-dessus, X admet un revêtement universel, et il est unique à équivalence de revêtement près.

<u>idée</u> : on fixe $x_0 \in X$, et on considère

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{x_0} = \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x_0\}/\sim$$

(dépend du choix de x_0)

où $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si γ_1 et γ_2 sont homotopes à extrémités fixées.

projection $p : \tilde{X} \to X$

$[\gamma] \mapsto \gamma(1)$

- Topologie sur $\tilde{X}$?

base de voisinages de $[\gamma]$:

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \sigma] \mid \sigma : [0,1] \to U, \sigma(0) = \gamma(1)\}$$

où U est un voisinage simplement connexe de $\gamma(1)$.

ceci forme la base d'une topologie.

(Si $U_{[\gamma]} \cap V_{[\eta]} \ni \alpha$, on prend $W \subset U \cap V$ simplement connexe contenant $\alpha(1)$, d'où $W_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\eta]}$)

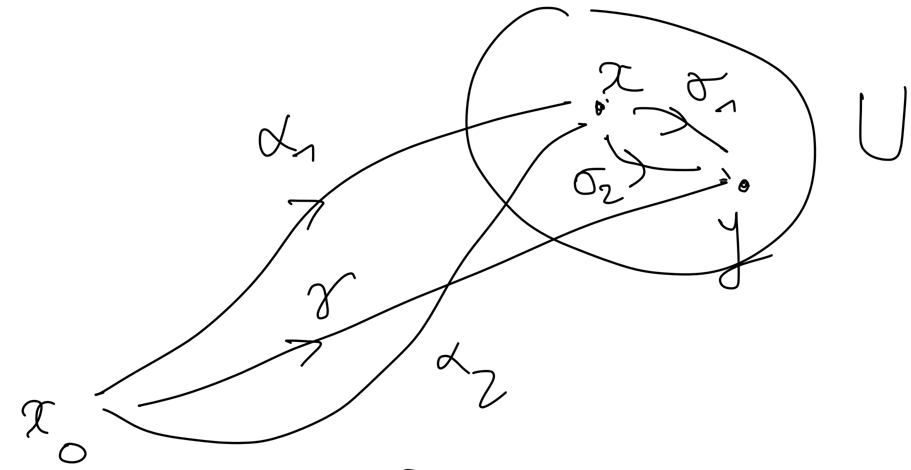
- $p : \tilde{X} \to X$ est un homéo local, en fait

$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ est un homéo

- $\tilde{X}$ est séparé : il suffit de séparer $[\alpha] \neq [\beta]$, avec $\alpha(1) = \beta(1)$, mais en fait

$$U_{[\alpha]} \cap U_{[\beta]} = \emptyset$$

Sinon, soit $[\gamma] \in U_{[\alpha]} \cap U_{[\beta]}$.



$[\gamma] = [\alpha * \sigma_1] = [\beta * \sigma_2]$

et $[\alpha] = [\beta]$ car

$\sigma_1 * \sigma_2^{-1}$ est

contractile

- Montrons que p est un revêtement

$\tilde{X}$ est connexe par arcs ?

$\forall\ \gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$,

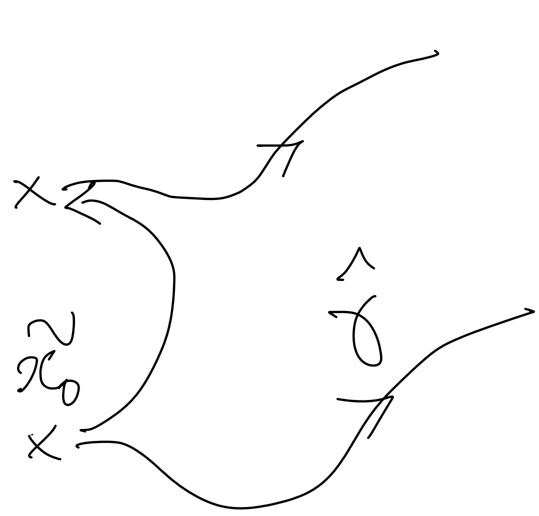
un arc de $[x_0]$ à $[\gamma]$ dans $\tilde{X}$

est donné par

$$\hat{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$$
$$s \mapsto \gamma_s$$

avec $\gamma_s(t) = \gamma(st)$.

il suffit de montrer que p a la propriété de relèvement des chemins.



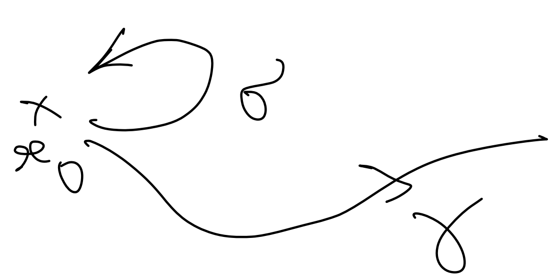
si $\gamma(0) = x_0$, la construction ci-dessus donne un relevé basé en $\tilde{x}_0$

si $\sigma : [0,1] \to X$ est un lacet basé en x_0,

i.e. $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$,

$$[0,1] \to \tilde{X}$$
$$s \mapsto [\sigma * \gamma_s]$$

donne un relevé basé en $[\sigma]$.



si $x_1 \in X$, $\eta : [0,1] \to X$, $\eta(0) = x_1$

$\alpha : [0,1] \to X$, $\alpha(0) = x_0$

$\alpha(1) = x_1$

$[\alpha] \in \tilde{X}$

$\rightsquigarrow$ on relève $\alpha * \eta$ à partir $\tilde{x}_0$

et on utilise la 2e moitié

du chemin

enfin, montrons que $\tilde{X}$ est simplement connexe.

Soit $\alpha : [0,1] \to \tilde{X}$ un lacet basé en $\tilde{x}_0$,

$\gamma = p \circ \alpha$ est lacet dans X, basé en x_0.

il existe $\tilde{\gamma}$ un relevé basé en $\tilde{x}_0$, et par unicité, $\tilde{\gamma} = \alpha$, $\tilde{\gamma}(1) = \alpha(1) = \tilde{x}_0$,

d'où $[\gamma] = [x_0]$

càd γ est contractile

par relèvement des homotopies, α est contractile.

<u>Unicité ?</u>

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, dashed, shift left, "\tilde{p}_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[ll, dashed, shift left, "\tilde{p}_2"] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Y_1, Y_2 simplement connexe

$y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$

$p_1(y_1) = p_2(y_2) = x_0$.

On prend $\tilde{p}_1 : Y_1 \to Y_2$ relevé de p_1, $\tilde{p}_1(y_1) = y_2$

$\tilde{p}_2 : Y_2 \to Y_1$ relevé de p_2 $\tilde{p}_2(y_2) = y_1$.

$\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 : Y_1 \to Y_1$ fixe y_1, et relève id_X.

Action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\tilde{X}_{x_0}$

c'est l'action évidente induite par

$$(\underset{\substack{\cap \\ \pi_1(X, x_0)}}{[\sigma]}, [\gamma]) \longmapsto [\sigma * \gamma]$$

$\hookrightarrow$ chemin avec $\gamma(0) = x_0$

Prop: L'action évidente de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\tilde{X}_{x_0}$ est une action par homéomorphismes, topologiquement libre.

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ sont dans la même orbite $\Longleftrightarrow$ $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$.

preuve

- Si U est un voisinage contractile de $\gamma(1)$, si $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$, $U_{[\sigma * \gamma]} = [\sigma] \cdot U_{[\gamma]}$

et $U_{[\gamma]} \cap U_{[\sigma * \gamma]} \neq \emptyset \Leftrightarrow [\gamma] = [\sigma * \gamma]$
$\Leftrightarrow [\sigma] = 1$

- $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \tilde{X}_{x_0}$ ie $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$

si $\exists \sigma \in \pi_1(X, x_0)$ t.q.

$$[\sigma * \gamma_1] = [\gamma_2]$$

$$\sigma * \gamma_1(1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

càd $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$.

réciproquement, si $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$,

$[\gamma_2 * \gamma_1^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ et

$$[\gamma_2 * \gamma_1^{-1}] \cdot [\gamma_1] = [\gamma_2]$$

donc $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ sont dans la même orbite.

Dans le cas particulier des revêtements de surfaces de Riemann :

Si X est une surface de Riemann et $p : Y \to X$ est un revêtement, Y a une unique structure de surface de Riemann t.q. p est holomorphe

(On utilise les ouverts de trivialisation de p pour construire des cartes grâce aux cartes de X

Les fonctions de transition sont (localement) les mêmes que pour X !)

Si X, Y, Z sont des surfaces de Riemann

$p : Y \to X$ un revêtement holomorphe

$f : Z \to X$ holomorphe

alors tout relevé $\tilde{f} : Z \to Y$ (s'il existe) est holomorphe.

Biholomorphismes

Déf: Un biholomorphisme $f : X \to Y$ est une fonction holomorphe t.q. $\exists\, g : Y \to X$ holomorphe avec $g \circ f = id_X$.

Prop: Soit $f : X \to Y$ injective, holomorphe. Alors f est un biholomorphisme entre X et $f(X)$.

preuve: Ceci découle de la forme locale des fonctions holomorphes, si $f'(z_0) = 0$, f n'est injective sur aucun voisinage de z_0.

Donc $f'(z) \neq 0$, et $(f^{-1})'(f(z_0)) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

Quand $X = Y$, un biholomorphisme $f : X \to X$ s'appelle un biholomorphisme de X.

Pour X fixée, on note $Bihol(X) =$ l'ens. des biholomorphismes de X ; c'est un groupe pour la composition (neutre $=$ identité).

Biholomorphismes de $\mathbb{C}$?

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un biholo.

on définit sur $\mathbb{C}^*$, $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$\leadsto$ g a une singularité isolée en 0.

En écrivant $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$,

on a $\quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ (série de Laurent)

Si $a_k \neq 0$ pour une infinité de valeurs de $k \in \mathbb{N}$, g a une singularité essentielle, l'image de tout disque épointé

$g(\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\})$

est dense dans $\mathbb{C}$

(Casorati-Weierstrass)

mais par injectivité, cet ensemble ne rencontre pas $g(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\})$ qui est un ouvert.

donc f est une fonction polynômiale, par injectivité elle doit être de degré 1, ie

$\exists a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ t.q.

$f(z) = az + b$.

$\mathrm{Bihol}(\mathbb{C}) = \{ z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \}$.

Biholo de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$?

pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, on note $\tilde{A} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ l'application obtenue par passage au quotient de

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $GL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (par homographie) et le noyau de l'action est donné par le sous-groupe des matrices scalaires

En d'autres termes, le quotient

$$PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$$

agit sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Fait : l'action $PGL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est transitive :

Soient $z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

on complète z en une base (z, z') de $\mathbb{C}^2$
w ——— (w, w') de $\mathbb{C}^2$

et on prend

$$A = \left(w \,\vdots\, w' \right) \left(z \,\vdots\, z' \right)^{-1}$$

Prop : $\quad \mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = PGL_2(\mathbb{C})$.

On a vu $\supset$.

Soit $f \in \mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$. On travaille avec

$$U_0 = \{ \pi((1, z)), z \in \mathbb{C} \}, \quad \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus U_0 = \{\infty\}.$$

on choisit $\varphi \in PGL_2(\mathbb{C})$ t.q.

$$\varphi \circ f(\infty) = \infty,$$

d'où $\varphi \circ f$ induit un biholomorphisme de $U_0 \simeq \mathbb{C}$, d'où $\exists\, a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi \circ f(\pi(1, z)) = \pi(1, az+b)$$

↳ ceci est une homographie?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ az+b \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \varphi \circ f = \psi \in PGL_2(\mathbb{C})$,

$$f = \varphi^{-1} \circ \psi \in PGL_2(\mathbb{C}).$$

D = disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

<u>$\mathrm{Bihol}(D) = ?$</u> on voit $D \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

et on commence par déterminer les éléments de $PGL_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Bihol}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ qui préservent D.

$$\pi((z_0, z_1)) \in D \iff \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2 < 1$$

$$\iff -|z_0|^2 + |z_1|^2 < 0.$$

Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$ t.q. $A^* J A = J$, où $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix}$.

(plus généralement, OK si $A^* J A = \lambda J$, $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$)

Alors l'homographie correspondante préserve D.
en particulier, pour tout $\alpha \in D$, l'homographie de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

préserve D:

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \bar{\alpha} \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} = (1-|\alpha|^2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Action dans la carte U_0?

$$\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\bar{\alpha}z \\ \alpha - z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}z} \end{pmatrix}$$

homographie $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1}$ (échange 0 et α)

(noter aussi que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha = id$)

Ceci montre que $PU(J)$ agit transitivement sur D.

<u>Fait</u>: $\mathrm{Bihol}(D) = PU(J)$

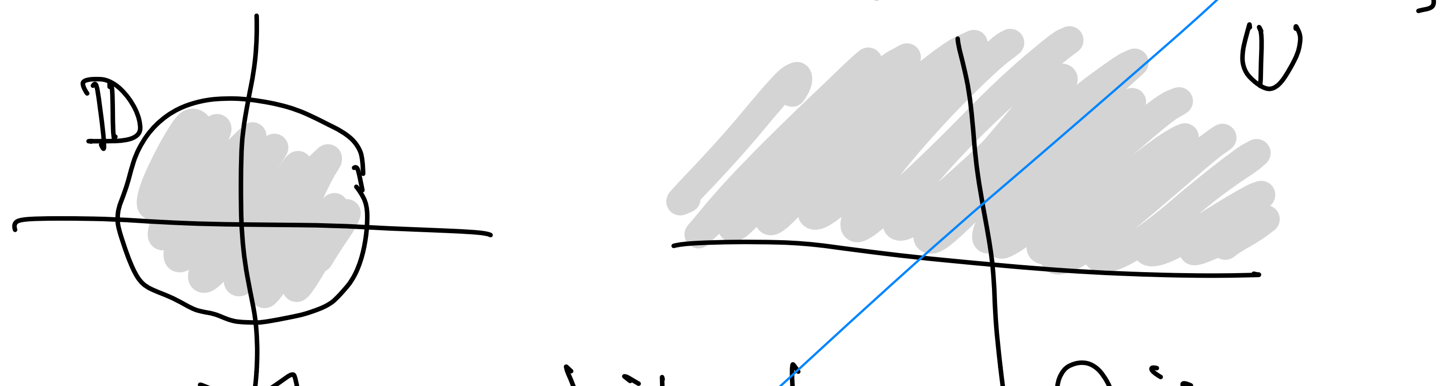
↳ souvent noté $PU(1,1)$
(projectivisé du) groupe des éléments de $Gl_2(\mathbb{C})$ qui préservent la forme hermitienne de signature $(1,1)$
$\langle z, w \rangle = w^* J v$.

<u>preuve</u>: Il suffit de montrer que tous les biholo de D qui fixent $0 \in D$ sont des éléments de $PU(J)$

Ceci découle du lemme de Schwarz,
si $f: D \to D$ holo avec $f(0)=0$,
$|f'(0)| \leq 1$, et si égalité $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ t.q. $\forall z \in D$,
$f(z) = \lambda z$.

Ceci est bien une homographie, prendre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C})$.

On peut en déduire les biholomorphismes du demi-plan supérieur $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$



parce qu'il existe un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{U}$, par exemple

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

(transformation de Cayley).

__Fait__ $\mathrm{Bihol}(\mathbb{U}) = PSL_2(\mathbb{R})$,

$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in PSL_2(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{U}$

via $\quad z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.

(fait en cours de géométrie hyperbolique ?)