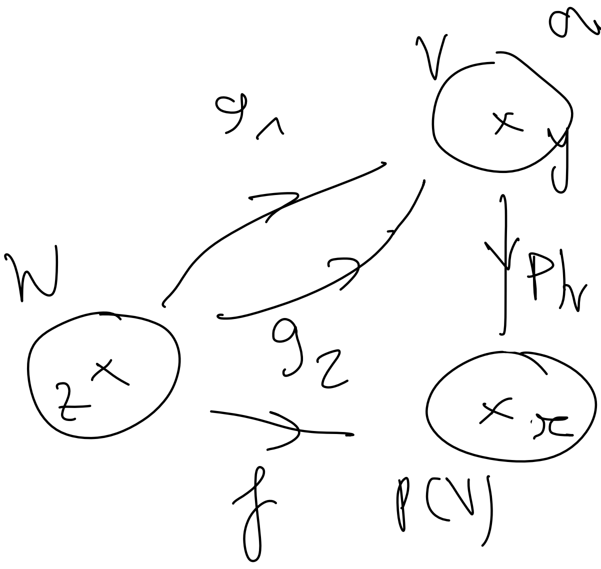
Relèvement des chemins, relèvement des homotopies.

Théorème : (unicité des relèvements)

X, Y séparés, $p : Y \to X$ homeo local
Z connexe, $f : Z \to X$ continu, $z_0 \in Z$.
Soient $g_1, g_2 : Z \to Y$ continues t.q. $p \circ g_1 = p \circ g_2 = f$ et $g_1(z_0) = g_2(z_0)$
Alors $g_1 = g_2$.

preuve. $A = \{ z \in Z \mid g_1(z) = g_2(z) \}$ est fermé
($Z \to Y \times Y$
$z \mapsto (g_1(z), g_2(z))$
$\rightsquigarrow$ image réciproque de la diagonale)

on veut m. q. A ouvert.
soit $z \in A$, $g_1(z) = g_2(z) = y \in Y$.
on prend un ouvert $V \ni y$ dans Y t.q $p|_V : V \to p(V)$ est un homeo



g_1, g_2 cont $\to$ on prend un ouvert $W \ni z$ t.q. $g_j(W) \subset V$.

$p \circ g_j = f$, $g_j|_W = (p|_V)^{-1} \circ f$
d'où $g_1|_W = g_2|_W$.
$\rightsquigarrow$ on utilise la connexité de Z.

Prop : (relèvement des chemins)

Soit $p : Y \to X$ un revêtement, $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$
$\gamma : [0,1] \to X$ continu, $\gamma(0) = x_0$.
Alors $\exists !$ relevé $\tilde{\gamma}$ de γ t.q. $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.

$\hookrightarrow$ conséquence du résultat suivant

Thm. (relèvement des homotopies) $K = [0,1]$ ou $\{pt\}$.

Soit $p : Y \to X$ un revêtement, $f : K \times I \to X$ cont et
$\tilde{f}_0 : K \times \{0\} \to Y$ un relevé de $f|_{K \times \{0\}}$.
Alors $\exists !$ $\tilde{f} : K \times I \to Y$ relevant f et prolongeant $\tilde{f}_0$.

Par compacité de $[0,1]$, il existe un voisinage N de z_0 dans K et $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ t.q. $\forall i < n$,

$f(N \times [t_i, t_{i+1}])$ est contenu dans un ouvert U_i trivialisant p.

↳ on peut supposer U_i connexe

Soit V_i la composante connexe de $f(z_0, t_{i-1})$ dans $p^{-1}(U_i)$, $p_{|V_i} : V_i \to U_i$ homéo

Quitte à rétrécir N, on peut supposer $f(N \times \{t_{i-1}\}) \subset V_i$

on pose alors $\tilde{f}_{|N \times [t_{i-1}, t_i]} = p_{|V_i}^{-1} \circ f_{|N \times [t_{i-1}, t_i]}$.

en partant de $i = 0$ et en répétant ceci jusqu'à t_{n-1}, on obtient un relevé sur $N \times [0,1]$.

par unicité du relèvement, les relevés partiels ainsi construits coïncident sur l'intersection de leurs domaines

→ définissent un relèvement.

Corollaire :
Soit $p : Y \to X$ un revêtement, $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$.
Alors 1) $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est injective
2) Si Y est connexe par arcs, p est un homéo ssi p_* est un isomorphisme.

preuve : 1) Soit $\gamma : [0,1] \to Y$ lacet en y_0, càd. γ continue et $\gamma(0) = \gamma(1) = y_0$.

Si $p_*[\gamma] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$, $p \circ \gamma$ est contractile, càd homotope au lacet constant égal à x_0.

Le lacet constant en x_0 se relève en le lacet constant en y_0, et l'homotopie se relève, d'où $[\gamma] = \{1\}$.

2) Supposons que p n'est pas bijective, soit $y_1 \neq y_0$ avec $p(y_1) = x_0$. Si $\tilde{\gamma}$ est un chemin de y_0 à y_1, $p \circ \gamma$ est un lacet, $[p \circ \gamma] \notin p_*(\pi_1(Y, y_0))$ (unicité du relèvement).

$p: Y \to X$ a la propriété du relèvement des chemins si $\forall y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$, γ chemin avec $\gamma(0) = x_0$ il existe un relevé $\tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = y_0$

Résultat utile en pratique :

Prop : $p: Y \to X$ un homeo local avec la propriété de relèvement des chemins

Si X est localement simplement connexe et Y est localement connexe par arcs.
Alors p est un revêtement.

preuve : Soit $x \in X$, $x \in U$ ouvert simplement connexe.
Soit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$ la décomposition de $p^{-1}(U)$ en composantes connexes par arcs.
(noter que les V_α sont ouverts)

On a $p(V_\alpha) = U$, sinon soit $x' \in U \setminus p(V_\alpha)$
γ un chemin de x à x',
$\tilde{\gamma}$ un relevé de γ à Y
$(\tilde{\gamma}(0) = y$, $p(y) = x)$.
$\leadsto \tilde{\gamma}([0,1]) \subset V_\alpha$, d'où $x' \in p(V_\alpha)$
contradiction.

la restriction $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$. est toujours un homeo local.
(car V_α ouvert)

si pas injective, soient $y_1, y_2 \in V_\alpha$, $p(y_1) = p(y_2) = u$.
soit γ un chemin de y_1 à y_2
$\leadsto p \circ \gamma$ est un lacet dans U
donc contractile,
$\leadsto y_1 = y_2$.

Prop. Soient X, Y séparés, $p : Y \to X$ un revêtement.
Soit Z (connexe par arcs)
simplement connexe
localement simplement connexe
$f : Z \to X$ continue, $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$ t.q.
$f(z_0) = p(y_0)$.
Alors $\exists!$ relèvement $\hat{f} : Z \to Y$ de f t.q.
$\hat{f}(z_0) = y_0$.

preuve :
pour $z \in Z$, on choisit un chemin γ de z_0 à z.
$\alpha = f \circ \gamma$ est un chemin dans X,
on le relève en $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$, $\tilde{\alpha}(0) = y_0$.
$(p \circ \tilde{\alpha} = f \circ \gamma)$
et on pose $\hat{f}(z) = \tilde{\alpha}(1)$.
le résultat est indépendant de α, car tous les chemins de z_0 à z sont homotopes (lemme de relèvement des homotopies).
clairement $\hat{f}$ relève f, reste à montrer que $\hat{f}$ est continue.
Soit $z \in Z$, $y = \hat{f}(z)$, $y \in V$ ouvert t.q. $p|_V : V \to U = p(V)$ est un homéo.
Soit $z \in W$ ouvert simplement connexe t.q.
$f(W) \subset U$.
$\leadsto$ on vérifie que $\hat{f}(W) \subset V$.
si $z' \in W$, on prend un chemin σ de z à z'
$f \circ \sigma$ chemin dans U
$\beta = p|_V^{-1} \circ f \circ \sigma$ relevé dans V à partir de y
$\alpha * \beta$ relève $f \circ (\gamma * \sigma)$, à partir de y_0
$\hat{f}(z') = \alpha * \beta(1) = \beta(1) \in V$.

Revêtement universel.

Soit X un espace topo séparé, connexe par arcs, localement simplement connexe.

(par ex : une surface de Riemann connexe).

Un revêtement $\tilde{X} \to X$ est dit <u>universel</u> $\tilde{X}$ est connexe par arcs et $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$.

<u>Théorème</u> : Sous les hypothèses ci-dessus, X admet un revêtement universel, et il est unique à équivalence de revêtement près.

<u>idée</u> : on fixe $x_0 \in X$, et on considère

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{x_0} = \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x_0\}/\sim$$

(dépend du choix de x_0)

où $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si γ_1 et γ_2 sont homotopes à extrémités fixées.

projection $p : \tilde{X} \to X$

$[\gamma] \mapsto \gamma(1)$

- Topologie sur $\tilde{X}$?

  base de voisinages de $[\gamma]$:

  $$U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \sigma] \mid \sigma : [0,1] \to U, \sigma(0) = \gamma(1)\}$$

  où U est un voisinage simplement connexe de $\gamma(1)$.

ceci forme la base d'une topologie.

(Si $U_{[\gamma]} \cap V_{[\eta]} \ni \alpha$, on prend $W \subset U \cap V$ simplement connexe contenant $\alpha(1)$, d'où $W_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\eta]}$)

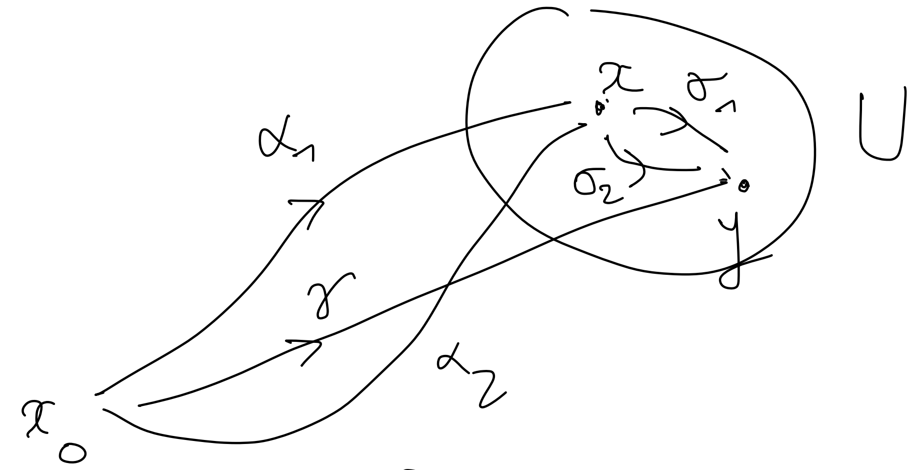
- $p : \tilde{X} \to X$ est un homeo local, en fait

  $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ est un homeo

- $\tilde{X}$ est séparé : il suffit de séparer $[\alpha] \neq [\beta]$, avec $\alpha(1) = \beta(1)$, mais en fait

  $$U_{[\alpha]} \cap U_{[\beta]} = \emptyset$$

  Sinon, soit $[\gamma] \in U_{[\alpha]} \cap U_{[\beta]}$.



$[\gamma] = [\alpha * \sigma_1] = [\beta * \sigma_2]$
et $[\alpha] = [\beta]$ car
$\sigma_1 * \sigma_2^{-1}$ est
contractile

- Montrons que p est un <u>revêtement</u>

$\tilde{X}$ est connexe par arcs ?

$\forall\ \gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$,
un arc de $[x_0]$ à $[\gamma]$ dans $\tilde{X}$
est donné par

$$\hat{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$$
$$s \mapsto \gamma_s$$

avec $\gamma_s(t) = \gamma(st)$.

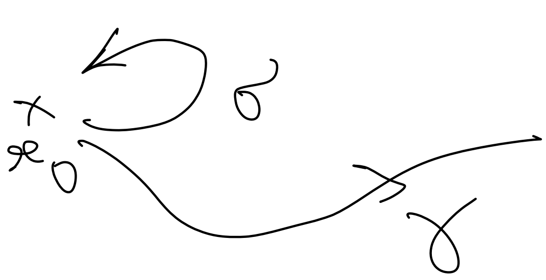
il suffit de montrer que p a la propriété de relèvement des chemins.

si $\gamma(0) = x_0$, la construction ci-dessus donne un relevé basé en $\tilde{x}_0$

si $\sigma : [0,1] \to X$ est un lacet basé en x_0,
i.e. $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$,

$$[0,1] \to \tilde{X}$$
$$s \mapsto [\sigma * \gamma_s]$$

donne un relevé basé en $[\sigma]$.



si $x_1 \in X$, $\eta : [0,1] \to X$, $\eta(0) = x_1$
$\alpha : [0,1] \to X$, $\alpha(0) = x_0$
$\alpha(1) = x_1$

$[\alpha] \in \tilde{X}$

$\rightsquigarrow$ on relève $\alpha * \eta$ à partir $\tilde{x}_0$
et on utilise la 2^{e} moitié
du chemin

enfin, montrons que $\tilde{X}$ est simplement connexe.

Soit $\alpha : [0,1] \to \tilde{X}$ un lacet basé en $\tilde{x}_0$,

$\gamma = p \circ \alpha$ est lacet dans X, basé en x_0.

il existe $\tilde{\gamma}$ un relevé basé en $\tilde{x}_0$, et par unicité, $\tilde{\gamma} = \alpha$, $\tilde{\gamma}(1) = \alpha(1) = \tilde{x}_0$,

d'où $[\gamma] = [x_0]$

càd γ est contractile

par relèvement des homotopies, α est contractile.

Unicité ?

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, dashed, bend left, "\tilde{p}_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[ll, dashed, bend left, "\tilde{p}_2"] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Y_1, Y_2 simplement connexe

$y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$

$p_1(y_1) = p_2(y_2) = x_0$.

On prend $\tilde{p}_1 : Y_1 \to Y_2$ relevé de p_1, $\tilde{p}_1(y_1) = y_2$

$\tilde{p}_2 : Y_2 \to Y_1$ relevé de p_2, $\tilde{p}_2(y_2) = y_1$.

$\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 : Y_1 \to Y_1$ fixe y_1, et relève id_X.

Action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\widetilde{X}_{x_0}$

c'est l'action évidente induite par

$$\underset{\pi_1(X, x_0)}{([\sigma], [\gamma])} \longmapsto [\sigma * \gamma]$$

$\hookrightarrow$ chemin avec $\gamma(0) = x_0$

Prop: L'action évidente de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\widetilde{X}_{x_0}$ est une action par homéomorphismes, topologiquement libre.

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \widetilde{X}$ sont dans la même orbite $\iff p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$.

preuve

- Si U est un voisinage contractile de $\gamma(1)$, si $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$, $U_{[\sigma * \gamma]} = [\sigma] \cdot U_{[\gamma]}$

  et $U_{[\gamma]} \cap U_{[\sigma * \gamma]} \neq \emptyset \iff [\gamma] = [\sigma * \gamma]$
  $\iff [\sigma] = 1$

- $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \widetilde{X}_{x_0}$ ie $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$

  si $\exists \sigma \in \pi_1(X, x_0)$ t.q.

  $$[\sigma * \gamma_1] = [\gamma_2]$$

  $$\sigma * \gamma_1(1) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

  càd $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$.

  réciproquement, si $p([\gamma_1]) = p([\gamma_2])$,

  $[\gamma_2 * \gamma_1^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ et

  $$[\gamma_2 * \gamma_1^{-1}] \cdot [\gamma_1] = [\gamma_2]$$

  donc $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ sont dans la même orbite.

Dans le cas particulier des revêtements de surfaces de Riemann :

Si X est une surface de Riemann et $p : Y \to X$ est un revêtement, Y a une unique structure de surface de Riemann t.q. p est holomorphe

(On utilise les ouverts de trivialisation de p pour construire des cartes grâce aux cartes de X
Les fonctions de transition sont (localement) les mêmes que pour X !)

Si X, Y, Z sont des surfaces de Riemann
$p : Y \to X$ un revêtement holomorphe
$f : Z \to X$ holomorphe
alors tout relevé $\tilde{f} : Z \to Y$ (s'il existe) est holomorphe.