Prop : Soient X, Y des surfaces de Riemann, connexes, X compacte, $f : X \to Y$ holomorphe non constante.

Alors

1) Y est compacte, et f est surjective.
2) Il existe un ensemble fini $S \subset X$ t.q.
$$f|_S : X \setminus S \to Y \setminus f(S)$$
est un revêtement fini, de degré d.
3) $\forall y \in Y, \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{mult}_x(f) = d$.

preuve : $f(X)$ est compact, donc fermé, et ouvert (coroll précédent).

$$\text{d'où } f(X) = Y.$$

S = ensemble des points de branchements de f.
S est localement fini, X compacte
$\rightsquigarrow S$ est fini

$F = f^{-1}(f(S))$ est fini, $X \setminus F$ reste connexe.

$\forall y \in Y \setminus f(S)$ et $x \in f^{-1}(y)$ on prend U_x vois de x t.q. $f|_{U_x} : U_x \to V_x = f(U_x)$ est un homéo. On peut supposer les U_x $(x \in f^{-1}(y))$ 2 à 2 disjoints.

$V = \bigcap_{x \in f^{-1}(y)} V_x$ est un ouvert, et

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(y)} (U_x \cap f^{-1}(V)) \underset{\text{homeo}}{\simeq} \underbrace{f^{-1}(y)}_{\text{topo discrète}} \times V$$

$$\begin{aligned} Y \setminus S &\to \mathbb{N} \\ y &\mapsto \# f^{-1}(y) \end{aligned}$$ est localement constante, donc constante, par connexité.

La formule découle de la forme locale □.

Conséquences :

1. Soit X une surface de Riemann compacte, connexe, $f : X \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est constante
2. (Liouville) Toute fn holo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bornée est constante
3. (d'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant a une racine

1. évident ($\mathbb{C}$ pas compact)
2. on voit $\mathbb{C}$ comme une carte de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$
   $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ a une singularité isolée en ∞, avec f bornée sur vois épointé, donc elle s'étend en une fn holo sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, qui est compacte
3. $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_r z^r = \sum_{k=0}^{r} a_k z^k$ définit une fonction holomorphe
   $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ via $\hat{f}(\infty) = \infty$.
   $\hat{\mathbb{C}}$ est une surface de Riemann compacte, $\hat{f}$ non constante, connexe
   $\rightsquigarrow \hat{f}$ est surjective.

<u>rem</u>: la propriété (1) motive l'étude des <u>fonctions méromorphes</u>

si X surface de Riemann, une <u>fonction méromorphe</u> sur X est une fonction holomorphe $X \setminus S \to \mathbb{C}$, où $S \subset X$ est un <u>fermé discret</u>, et $\forall s \in S$, f a un pôle en s, càd.

$$\forall s \in S, \ \lim_{z \to s} |f(z)| = +\infty .$$

Une telle fonction définit une application holomorphe $X \to \widehat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Réciproquement, si $g : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est holomorphe, alors soit $g \equiv \infty$, soit $g^{-1}(\{\infty\})$ n'a que des points isolés, et $g : X \setminus g^{-1}(\{\infty\})$ est holomorphe (càd g méromorphe)

<u>Exercice</u>:

montrer que toute fonction méromorphe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est rationnelle (càd. quotient de deux polynômes)

"Rappels" de topo alg.

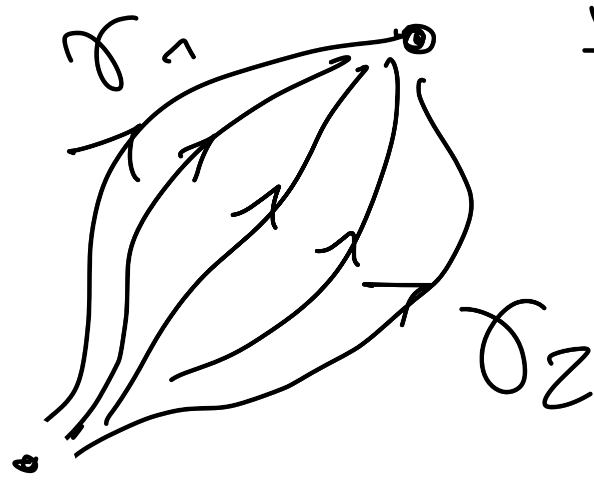
X esp. topo

$\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$ continues ("chemins")

$\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$

$\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Sont homotopes (à extrémités fixées) si $\exists\, H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continue t.q.

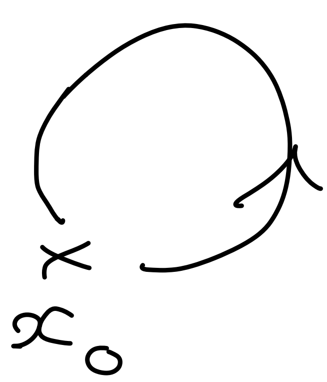


$\forall t,\ H(t,j) = \gamma_j(t)$

$\forall s,\ H(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$

$H(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

<u>lacet</u> basé en $x_0 \in X$ = chemin $\gamma : [0,1] \to X$ t.q. $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$



$\pi_1(X, x_0) = \{\text{lacets basés en } x_0\} / \sim$

homotopie à extrémités fixées. (c'est bien une relation d'équivalence).

Si X est connexe par arcs, pour tous $x_0, x_1 \in X$,

γ $\quad \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$

$\gamma \longmapsto \sigma \cdot \gamma \cdot \sigma^{-1}$

induit un isom.

On note alors $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ pour un $x_0 \in X$.

X est dit <u>simplement connexe</u> s'il est connexe par arcs et $\pi_1(X) \cong \{1\}$

Toute application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme de groupes

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

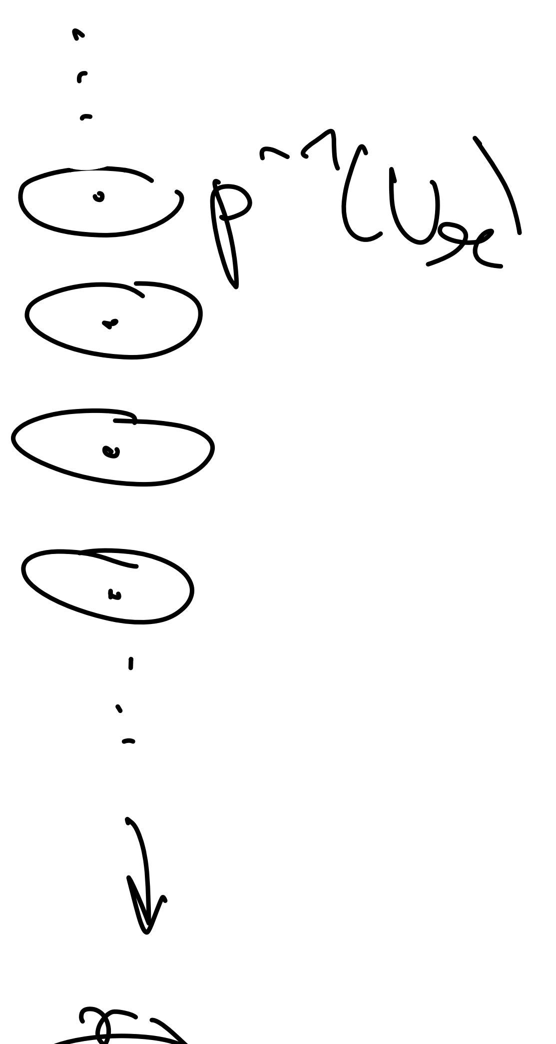
et si $g : Y \to Z$ continue,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* .$$

$p : Y \to X$ est un <u>homéo local</u>

si $\forall y \in Y$, $\exists\, U_y$ et V_x des vois. de y et $x = f(y)$ resp. t.q. $p|_{U_y} : U_y \to V_x$ est un homéo.

$p : Y \to X$ est un <u>revêtement</u> s'il ~~faut~~ $\forall x \in X$, $\exists\, U_x \subset X$ ouvert, $x \in X$ t.q. $p^{-1}(U_x) \underset{\text{homeo}}{\simeq} U_x \times \underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{muni de la topo discrète}}$



<u>ex</u> : $\Lambda = \mathbb{Z} v_1 + \mathbb{Z} v_2$, v_1, v_2 base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-esp vect.

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ est un revêtement.

<u>déf</u> : pour $x \in X$, $f^{-1}(x)$ s'appelle la fibre au dessus de x.

Si X est connexe, et $f : Y \to X$ est un revêtement, les fibres ont toutes le même "nombre" d'éléments.

deux revêtements $f_1 : Y_1 \to X$, $f_2 : Y_2 \to X$ sont équivalents/isomorphes s'il existe un homéo $h : Y_1 \to Y_2$ t.q.

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commute

(ceci implique que h préserve les fibres, càd. envoie toute fibre de f_1 dans une même fibre de f_2)

Sous des hypothèses assez générales (X connexe, localement simplement connexe par exemple), les classes d'équivalences de revêtements de X sont correspondance avec les sous-groupes de $\pi_1(X)$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sous-groupes} \\ \text{de } \pi_1(X, x_0) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{correspondance de Galois}} \left\{ \begin{array}{c} \text{revêtement} \\ \text{par arcs } Y \to X \end{array} \right\}$$

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) \longleftarrow p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$$

le sous groupe trivial correspond à l'unique revêtement $\tilde{X} \to X$ t.q. $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$, qui s'appelle revêtement universel de X

le groupe fondamental agit sur $\tilde{X}$

- $\tilde{X}/\pi_1(X)$ est homéomorphe à X
- pour un sous-groupe $H \subset \pi_1(X)$ $\tilde{X}/H$ est un revêtement de X, et $\pi_1(\tilde{X}/H) = H$.

$H \subset \pi_1(X, x_0)$ est distingué

$\Longleftrightarrow$ l'action du groupe du revêtement transitive sur une fibre

$\Longleftrightarrow$ l'action du groupe du revêtement transitive sur chaque fibre

Dans ce cas on parle de revêtement <u>galoisien</u>, et le groupe du revêtement est le groupe quotient

$\pi_1(X, x_0)/H$.

groupe du revêtement $p: Y \to X$:

groupe des homéomorphismes de Y qui préservent les fibres (i.e. qui relèvent l'identité sur X).