(31/1/2025)

Fonctions holomorphes

Soient X, Y deux surfaces de Riemann, notons $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta\in B}$ des atlas holomorphes sur X, Y respectivement.

Une application $f : X \to Y$ est dite holomorphe si (son expression en cartes est holo, càd.) $\forall x \in X$, $\forall \alpha, \beta$ t.q. $x \in U_\alpha$ et $f(x) \in V_\beta$ et la fonction $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi_\alpha(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha)$

rem: 1) Il suffit de vérifier l'holomorphie de l'expression en carte pour un atlas de la classe d'équivalence d'atlas.

2) Si $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ est holo entre les surfaces de Riemann U et $\mathbb{C}$ ssi elle est holomorphe au sens usuel

3) La composée de deux fonctions holom. est holomorphe.

Exemples : 1) Soit $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$, v_1, v_2 une base de $\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On a vu la fois passée que $\mathbb{C}/\Lambda$ est une surface de Riemann, la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ est holomorphe.

En effet, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\pi(z) = z + \Lambda \in \mathbb{C}/\Lambda$ on prend un $V \subset \mathbb{C}$ t.q. $\pi|_V$ est injective, ce qui donne une carte $\pi(V) \to V$ et l'expression de π dans cette carte est l'identité.

2) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \{\mathbb{C}v \mid v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}/\sim$

$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.q. } v_1 = \lambda v_2$

$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ projection.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (z_0, z_1) & \longmapsto & (z_1, z_0) \end{array}$$

induit une application $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ car $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \forall (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\tilde{f}(\lambda(z_0, z_1)) = \lambda(z_1, z_0)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, dashed, "f"] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

On a utilisé l'atlas à deux cartes

$U_0 = \{\pi(z_0, z_1) \mid z_0 \neq 0\}$ | $U_1 = \{\pi((z_0, z_1)) \mid z_1 \neq 0\}$

$\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ | $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$\pi((z_0, z_1)) \longmapsto \frac{z_1}{z_0}$ | $\pi((z_0, z_1)) \longmapsto \frac{z_0}{z_1}$

Si $\pi(1, z) \in U_0$, $\varphi_0(\pi(1, z)) = z$

$f(\pi(1, z)) = \pi(z, 1) \in U_1$,

et on a $\varphi_1 \circ f \circ \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_1 \circ f(\pi(1, z))$

$= \varphi_1(\pi(z, 1)) = z$

(de même pour $\pi(z, 1) \in U_1$, $f(\pi(z, 1)) \in U_0$).

$\leadsto f$ est holomorphe.

En voyant $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ comme $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

f s'écrit $f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$
$z \longmapsto \frac{1}{z}$ (convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).

plus généralement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$,
l'action $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \longmapsto Az$$

passe au quotient et définit une application holomorphe

$$f_A : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

En voyant $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \hat{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$, cette application s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned} \qquad \left(\frac{1}{\infty} = 0, \frac{a}{\infty} = 0\right)$$

une telle application s'appelle une <u>homographie</u>

Beaucoup de propriétés des fonctions holomorphes sur les ouverts de $\mathbb{C}$ passent telles quelles aux surfaces de Riemann.

1) <u>Prolongement analytique.</u>

Soient X, Y deux surfaces de Riemann, X connexe
$f, g : X \to Y$ holomorphes, $A \subset X$ t.q.

$$f|_A = g|_A$$

Si A admet un point d'accumulation $a \in X$
alors $f = g$.

Preuve: $C = \{x \in X \mid \exists \text{ voisinage } W \text{ de } x \text{ t.q. } f|_W = g|_W\}$
C est ouvert par définition
on montre qu'il est fermé, soit $b \in \partial C$.
f_1, f_2 continues $\to f_1(b) = f_2(b)$
on prend une carte $\varphi : U \to \mathbb{C}$, $b \in U$,
U connexe. Par le cas de fns holo,
$f_1|_U = f_2|_U$ et $b \in C$.

X connexe $\to$ $C = \emptyset$ ou $C = X$
$C = \emptyset$ exclu, car $a \in C$.

2) Forme locale des fonctions holomorphes.

Prop: (inversion locale)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ holo, $z_0 \in U$ t.q. $f'(z_0) \neq 0$. Alors f est localement inversible, $\exists V \subset U$, $z_0 \in V$ t.q. $f|_V$ est bijective, de réciproque holomorphe.

Théorème (forme locale/multiplicité)

Soient X, Y des surfaces de Riemann, X connexe, $f : X \to Y$ holo non constante, $x \in X$.

Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des cartes

$\varphi : U \to \mathbb{C}$, $x \in U$, $\varphi(x) = 0$

$\psi : V \to \mathbb{C}$, $f(x) \in V$, $\psi(f(x)) = 0$

t.q. $f(U) \subset V$ et

$$\forall z \in U, \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^n.$$

preuve: on choisit des cartes avec les propriétés de normalisation et on considère la série de Taylor de $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en 0, elle n'est pas identiquement nulle (sinon, par prolongement analytique, f c^{st})

$$h(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

$$= z^n u(z)$$

avec u holo, non nulle en 0

$\leadsto$ admet une racine $n^{ème}$ près de 0, $u = v^n$

$h(z) = (z v(z))^n$, et par inversion locale, h est bijective entre deux voisinages de 0

n bien défini ?

ça découle de l'interprétation comme multiplicité locale de f près de $x, f(x)$, cf. ci-dessous.

Déf : l'entier n qui apparaît dans la définition s'appelle la multiplicité de f en x.

Comme $z \mapsto z^n$ est $n:1$ sur $\mathbb{C}^*$, on a que x et $f(x)$ ont des voisinages U, V resp. t.q. tout $y \in V \setminus \{f(x)\}$ a n préimages dans U et y a une seule préimage dans U.

f est localement injective près de x $\Leftrightarrow$ la multiplicité de f en x vaut 1 et dans ce cas, f est un difféo local en x

Les points $x \in X$ en lesquels la multiplicité de f est ≥ 2 s'appellent les points de branchement de f

rem : Il découle du théorème que les points de branchement sont isolés.

Coroll: (de la forme locale)

Soient X, Y deux surfaces de Riemann, X connexe.
Soit $f : X \to Y$ non constante.
Alors f est ouverte ($\forall U \subset X$ ouvert, $f(U) \subset Y$ est ouvert)

Prop: Soient X, Y des surfaces de Riemann, connexes, X compacte, $f : X \to Y$ holomorphe non constante.
Alors
1) Y est compacte, et f est surjective.
2) Il existe un ensemble fini $S \subset X$ t.q.
$$f|_S : X \setminus S \to Y \setminus f(S)$$
est un revêtement fini, de degré d.
3) $\forall y \in Y, \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{mult}_x(f) = d.$