Troisième contrôle continu

Mardi 5 décembre 2023

Durée : 1 h.
Documents, téléphones portables, objets connectés interdits.
La rédaction et la précision des arguments sont des critères importants d'évaluation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1) Donner la définition de : « f est uniformément continue dans Ω. »
2) On suppose que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x, y \in \Omega,\ ||f(x) - f(y)|| \leqslant k||x - y||.$$

   Montrer que f est uniformément continue sur Ω.
3) Soient $v, w \in \mathbb{R}^d$. Donner la définition de : « f admet une dérivée directionnelle en v dans la direction w. »
4) Si f est différentiable en v, donner la formule qui relie la différentielle de f et sa dérivée directionnelle en v dans la direction w.

Exercice 2. (8 points)
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.
   Dans la suite, on notera toujours f la fonction prolongée par continuité, qui est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
3) Pour $w \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$ calculer $f(tw)$, et en déduire que f admet une dérivée directionnelle dans la direction w en $(0,0)$.
4) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Si oui, décrire sa différentielle en $(0,0)$.
5) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. (8 points)
On pose $F(x,y) = (x+y, xy)$ et $G(s,t) = s + \sqrt{s^2 - 4t}$.

1) Donner le domaine de définition de F et G.
2) Donner le domaine de définition des deux dérivées partielles de G.
3) Calculer la matrice jacobienne de F et le gradient de G en un point quelconque de leurs domaines de définition respectifs.
4) Justifier que $G \circ F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.
5) Déterminer la différentielle de la composition $G \circ F$ au point $(2,1)$
   (a) en appliquant la règle de composée des différentielles ;
   (b) directement après avoir calculé $G \circ F(x,y)$.