Ex. 2 [Mat 303/2013 Corrigé CC3]

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$(x,y) \to 2x^2y$ et $(x,y) \to x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

1) f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. C'est donc une fonction continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

on a donc la majoration : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$|f(x,y)| \leq 2 \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2(x^2+y^2)$$

Par suite, $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.

3) Soit $v \in \mathbb{R}^2$. On pose $v = (v_1, v_2)$.

$$f(tv) = f(tv_1, tv_2) = \frac{2(tv_1)^2(tv_2)}{\sqrt{(tv_1)^2+(tv_2)^2}}$$

$$= 2\frac{t^3}{|t|} f(v).$$

On a donc $\left|\frac{f(tv)-f(0)}{t}\right| = 2\frac{t^2}{|t|} = 2|t| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

donc $\frac{f(tv)-f(0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

4) Le plus simple est de remarquer directement que

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)}\right| \leq 2|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

donc $f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ en $(0,0)$

ceci prouve que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle en $(0,0)$ est l'application nulle

[Rq : on a bien : $\underbrace{f(x,y)}_{}= \overset{0}{f(0,0)} + \overset{0}{Df_0(x,y)} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $f(x,y)$!]

5) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{4xy\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y \times 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$$= \frac{4x^3y + 4xy^3 - 2x^3y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$= \frac{2x^3y + 4xy^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 6\sqrt{x^2+y^2}$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

[rappel : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial w}(0,0)$ où $w = (1,0)$

Le 3) montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$]

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

De même, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\dfrac{2x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| \leq 2|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).$

donc les deux dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

En dehors de $(0,0)$, les formules calculées précédemment montrent que les deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

Ex. 1 2) On suppose que f est k-lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon / k$. $\delta > 0$ car ε et k sont > 0.

Si $\|x - y\| \leq \delta$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ par hypothèse
$$\leq k\delta = \varepsilon.$$

On a bien montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ (qui peut dépendre de ε) tel que $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.
f est donc uniformément continue.

Ex. 3 $\quad F(x,y) = (x+y, xy)$

$$G(s,t) = s + \sqrt{s^2 - 4t}$$

1) F est définie sur $\mathbb{R}^2$. G est définie sur $\Omega = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geq 4t\}$.

2) F est clairement une composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc ses dérivées partielles sont définies dans $\mathbb{R}^2$ tout entier.

G est également une composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ là où la racine ne s'annule pas. Les dérivées partielles sont donc définies sur $\mathring{\Omega} = \{(s,t) \in \mathbb{R} \mid s^2 > 4t\}$.

3) Rappel : $\mathrm{Jac}F_v$ est la matrice de $h \mapsto DF_v(h)$

On a $\mathrm{Jac}F_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(v) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(v) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(v) \end{pmatrix}$

Ici, $\mathrm{Jac}F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$.

et $DG_u = \left(\frac{\partial G}{\partial s}(u), \frac{\partial G}{\partial t}(u) \right)$

d'où $DG_{(s,t)} = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2-4t}}, \frac{-2}{\sqrt{s^2-4t}} \right)$.

4) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc sur U.

Si $(x,y) \in U$, $F(x,y)$ vérifie : $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0$

Comme $x > y$, on a en outre $\sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = x-y$.

donc $F(x,y) \in \mathring{\Omega}$ et $G \circ F$ est donc la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans leurs domaines respectifs.

5) a) La formule de la composée des différentielles est :

$$D(G \circ F)_v = DG_{F(v)} \circ DF_v$$

Matriciellement :

$$DG\circ F_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x+y}{x-y} & \frac{-2}{x-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} & \frac{2x}{x-y} - \frac{2x}{x-y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5) En tenant compte de $x > y$, on calcule :

$$G\circ F(x,y) = G(x+y, xy) = x+y+\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$$

$$= x+y+x-y$$

$$= 2x.$$

donc $DG\circ F_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$

Les calculs sont valables pour tout $(x,y) \in U$, donc en particulier en $(3,1)$.