Master 1ère année **Année** 2018 2019

TD de EDO-EDP Feuille n° 6.

Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_k(t) = e^{2i\pi kt}$, et $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(t)$. Montrer que $D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \text{ si } t \notin \mathbb{Z}, \\ 2n+1 \text{ sinon.} \end{cases}$ Montrer que D_n est paire, 1-périodique et que $\int_0^1 D_n(t) = 1$.

Exercice 2. On définit le noyau de Fejer par $\phi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$. Montrer que $\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\pi nt)}{\sin(\pi t)}\right)^2 \text{ si } t \notin \mathbb{Z}, \\ n \text{ sinon.} \end{cases}$

Exercice 3. (Théorème de Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, de période 1, et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers $\tilde{f}$, où $\tilde{f}(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$, et $f(x_\pm)$ désignent les limites à gauche (resp. droite) de f en x.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, périodique de période 1.

(1) Si f est de classe C^1, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = 2\pi i \cdot n \cdot c_n(f)$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|$ converge, et que la série de Fourier $S_\infty(f)$ converge uniformément vers f.

(2) Si f est de classe C^p, montrer qu'il existe une constante M telle que $|c_n(f)| \leqslant \frac{M}{n^p}$ pour tout $n \neq 0$.

Exercice 5. Retrouver les formules pour les coefficients (a_n, b_n ou c_n) de Fourier pour une fonction T-périodique.

Exercice 6. Retrouver les formules pour les séries de Fourier en sinus/cosinus pour les fonctions (intégrables) définies sur un intervalle de la forme $[-L, L]$. On note a_n les coefficients de $\cos \frac{n\pi}{L}t$, et b_n les coefficients de $\sin \frac{n\pi}{L}t$. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors la série de Fourier correspondante est une série de cosinus (resp. sinus).

Exercice 7. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 8. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Déduire de Parseval que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(ax)$. Calculer le développement en série de Fourier de f, et en déduire une formule pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$.

Exercice 10. Soit $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 sur $[0, L]$ telle que $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$. Soit $D > 0$ une constante. Montrer que l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$x \in [0, L]$, $t \geqslant 0$, admet une unique solution $u : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant les conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

pour tout $x \in [0, L]$. Montrer que la solution sécrit

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} e^{-\pi^2 k^2 D t / L^2},$$

et donner une formule pour les a_k en fonction de φ.