Master 1ère année **Année** 2018 2019

TD de EDO-EDP Feuille n° 5.

Sturm-Liouville

Exercice 1. Soit $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = 0$. Soit y une solution de l'équation $y'' + (1 + \epsilon(t))y = 0$ non identiquement nulle. Montrer que le nombre de zéros de y entre 0 et A est équivalent à A/π quand $A \to +\infty$.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, positive, et soit y une solution de $y'' + qy = 0$ sans zéro au voisinage de $+\infty$. Montrer que q est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que y'/y est positive, décroissante au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. On considère l'équation $y''+qy = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, négative, non nulle.

(1) (a) Montrer que si y est une solution réelle, alors y^2 est convexe.
 (b) Montrer que si y est une solution réelle positive sur I, alors y est convexe sur I.
 (c) Montrer que si y est une solution réelle bornée sur $\mathbb{R}$, alors $y = 0$.

(2) Soit φ la solution telle que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$. Montrer que $|\varphi| \geqslant 1$, puis $\varphi \geqslant 1$ et convexe sur $\mathbb{R}$.

(3) On suppose qu'il existe un $\omega > 0$ tel que $q(x) < -\omega^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\varphi(x) \geqslant \mathrm{ch}(\omega x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Indication: On pourra écrire $y'' - \omega^2 y = f(t)$ pour $f(t) = -(q(t) + \omega^2)y(t)$, et utiliser la variation des constantes.*

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et soit a un réel, $a > 0$. Montrer que l'équation $y'' - a^2y = f$ admet une unique solution bornée. *Indication: on pourra utiliser la méthode de variation des constantes.*

Exercice 5. Soient $y_1, y_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, sans zéro commun, et $w = y_1y_2'-y_1'y_2$ leur wronskien. Si $y_1+iy_2 = re^{i\theta}$, montrer que $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta = \theta_0+\int_0^x \frac{w(t)}{r(t)^2}dt$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $q : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, $q > 0$ telle que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}du = +\infty$ et $q'(x) = o(q(x)^{3/2})$ quand $x \to +\infty$. Soit y une solution réelle non nulle de l'équation $y'' + qy = 0$ sur $[a, +\infty[$ et soit $N(x)$ le nombre de zéros de y dans $[a, x]$. Montrer que $N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}du$ pour $x \to +\infty$.

Considérer les cas $a = 1$, $q(x) = 1/4x^2$, et noter que l'hypothèse de divergence sur l'intégrale de $\sqrt{q(u)}$ est donc nécessaire en général.

Exercice 7. On considère l'équation $y'' + qy = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, π-périodique, et paire. Soit W l'espace vectoriel de ses solutions, et y_1, y_2 la base canonique de W (c-à-d. $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$).

(1) On note $A(y)(t) = y(t+\pi)$ pour tout $y \in W$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $A : W \to W$ est une application linéaire bien définie. On note encore $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique.

(2) Montrer que y_1 est paire et que y_2 est impaire. Montrer que $\det A = 1$ et $a = d$.

(3) On note $T = \mathrm{tr} A$. Montrer que
  (a) $|T| < 2 \iff$ toutes les solutions sont bornées;
  (b) $|T| = 2 \implies$ il existe une solution non nulle non bornée;
  (c) $|T| = 2 \iff bc = 0$;
  (d) $|T| > 2 \implies$ toutes les solutions non nulles sont non bornées.

(4) On supose $q \geqslant 0$, mais non identiquement nulle. Montrer que si $\int_0^\pi q(x)dx \leqslant \frac{4}{\pi}$, alors toutes les solutions sont bornées. *Indication: Montrer que si f est de classe C^2, $f(a) = f(b) = 0$ et $f > 0$ sur $]a, b[$, alors* $\displaystyle\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)}dx > \frac{4}{b-a}$.

Exercice 8. Soit I un intervalle ouvert, $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et $[a, b] \subset I$. On cherche les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une solution non nulle au problème de Sturm-Liouville

$$(S) \begin{cases} y'' + (q + \lambda)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

On note F_λ l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (S). On appelle λ une valeur propre du problème de Sturm-Liouville si F_λ est non trivial. On note Λ l'ensemble des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville (S), et les éléments non nuls de F_λ sont alors appelées *fonctions propres* du problème.

(1) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de (S) si et seulement si l'unique solution y_λ de $y'' + (q + \lambda)y = 0,\ y(a) = 0,\ y'(a) = 1$ vérifie $y_\lambda(b) = 0$. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\dim F_\lambda \leqslant 1$.

(2) On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de y_λ dans $[a, b]$. Montrer que N est une fonction croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(\lambda) \leqslant n + 1$ si $\lambda \leqslant (\dfrac{n\pi}{b-a})^2 - \sup\limits_{[a,b]} q$, et $N(\lambda) \geqslant n + 1$ si $\lambda \geqslant (\dfrac{n\pi}{b-a})^2 - \inf\limits_{[a,b]} q$.

(3) Montrer que l'application $F(x, \lambda) = y_\lambda(x)$ est de classe C^2 sur $I \times \mathbb{R}$.

(4) Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et soient $a = x_1(\lambda_0) < \cdots < x_{N(\lambda_0)}(\lambda_0) \leqslant b$ les zéros de y_λ dans $[a, b]$. En appliquant le théorème des fonctions implicites à F, montrer qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \leqslant N(\lambda_0)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$.

(5) On suppose $\lambda_0 \notin \Lambda$. Montrer que $x_{N(\lambda_0)}(\lambda_0) < b$ et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \geqslant N(\lambda_0)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$.

(6) On suppose $\lambda_0 \in \Lambda$. Montrer que $x_{N(\lambda_0)} = b$ et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \geqslant N(\lambda_0) - 1$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$. Déduire que $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$.

(7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $] - \infty, (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \sup_{[a,b]} q]$ contient au plus n points de Λ, et que $] - \infty, (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \inf_{[a,b]} q]$ contient au moins n points de Λ. En déduire que $\Lambda = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ où (λ_n) est une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$, et que N vaut 1 sur $] - \infty, \lambda_0[$ et $n + 1$ sur $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$.

(8) Montrer que $\lambda_n \sim (\frac{\pi n}{b-a})^2$ lorsque $n \to +\infty$, et que tout fonction propre associée à λ_n admet $n + 1$ zéros dans $[a, b]$.