Feuille n° 4.

Étude qualitative en dimension 2

Intégrales premières et portraits de phases

Exercice 1. Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^d)$ une intégrale première pour l'équation $X' = F(X)$. Démontrer que si le point $X_0 \in \mathbb{R}^d$ est tel que l'ensemble $\{X \ : \ H(X) = H(X_0)\}$ est compact, alors la solution $X(t)$ du problème de Cauchy

$$X'(t) = F(X(t)), \qquad X(0) = X_0,$$

est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier, si tous les ensembles $H^{-1}(c)$, pour $c \in \mathbb{R}$, sont compacts, alors le champ F est complet.

Exercice 2. Trouver une intégrale première pour le système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \dfrac{x^2}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

et tracer son portrait de phase.

Etude qualitative de systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 3. On considère le système suivant:

$$\begin{cases} x' = 2y + 2x^2 \\ y' = -2x - 4x^3 - 4xy. \end{cases}$$

(1) Vérifier que $H(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y$ est une intégrale première.
(2) Démontrer que les solutions sont globales.
(3) Montrer que les solutions sont périodiques, puis calculer leur période.
(4) Pour $a > 0$ on considère le système perturbé

$$\begin{cases} x' = 2y + 2x^2 - ax \\ y' = -2x - 4x^3 - 4xy + 2ax^2. \end{cases}$$

Montrer à l'aide du lemme de Gronwall que le système perturbé admet des solutions globales.
(5) Montrer que toute les solution du système tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 4 (Zuily, Queffélec : Éléments d'analyse pour l'agrégation). On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y, \\ u' = x(1+y). \end{cases} \tag{2}$$

(1) Etudier les points d'équilibre et leur nature.
(2) Déterminer les isoclines.
(3) Déterminer les solutions particulières.
(4) Déterminer les symétries et le sens du champ.

Exercice 5 (Le système proies - prédateurs). Etablir un portrait de phase pour le système différentiel

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \tag{3}$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives. On étudiera les solutions d'équilibre, et les systèmes linéarisés correspondants. Pouvez-vous donner une intégrale première du système?

Exercice 6. On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - xy - 2x^2 \\ y' = -2y + xy - y^2. \end{cases} \tag{4}$$

(1) Montrer que les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0, \ x > 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0, \ y > 0\}$ correspondent à des trajectoires pour le système (4). En déduire que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans l'intervalle maximal d'existence.
(2) Calculer les points critiques de (4) dans $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ et déterminer leur nature.
(3) Distinguer trois zones de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ où $f(x, y) = x - xy - 2x^2$ et $g(x, y) = -2y + xy - y^2$ sont de signe constant, et tracer l'allure du champ de vecteurs de composantes (f, g) dans chacune de ces zones.
(4) Soit $0 < \varepsilon < 1/2$. Montrer que l'ensemble $D_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - 2\varepsilon, \ \varepsilon \leq x \leq 2 + y\}$ est positivement invariant, c'est-à-dire que le champ est rentrant sur les frontières du domaine D_ε.
(5) Montrer que si $(x(0), y(0)) \in D_\varepsilon$, alors $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (1/2, 0)$.

Exercice 7. Étudier les systèmes suivants :

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x^2y^2 - 1 \\ y' = x^2 + y^2 - 4 \end{cases} \qquad\qquad (b) \quad \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = -x. \end{cases}$$

Exercice 8 (Contre-exemple au théorème de linéarisation avec valeur propre imaginaire pure). En utilisant le coordonnées polaires (ρ, θ) telles que $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, trouvez les solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

et du système linéarisé $x' = -y, y' = x$. Tracer les portraits de phases des deux systèmes.

Flot

Exercice 9. On considère l'équation différentielle scalaire

$$\frac{du}{dt} = (1 + \cos t)u - u^3 \tag{5}$$

(1) (a) Si $u : J \to \mathbb{R}$ est une solution telle que $u(t_1) = 0$ pour un $t_1 \in J$, que peut-on dire de u?
  (b) Soit $v > 0$ et $u : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy pour l'équation (5) avec $u(0) = v$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $0 < u(t) \leqslant ve^{Ct}$ pour tout $t \in J$, $t \geqslant 0$.
  (c) Montrer que toutes les solutions maximales de (5) sont globales sur $\mathbb{R}_+$.
(2) On note $\phi = \phi^0$ le flot de (5) en $t = 0$ (qui est global d'après ce qui précède), et $p(v) = \phi(2\pi, v)$ pour $v \in \mathbb{R}_+$.
  (a) Calculer $p(0)$ et $p'(0)$.
  (b) Trouver une équation différentielle dont p est solution, et résoudre cette équation.
  (c) Déduire de ce qui précède l'existence d'une solution 2π-périodique à valeurs strictement positives de l'équation (5).