Master 1**ère année** **Année** 2018 2019

TD de EDO-EDP Feuille n° 3.

Etude qualitative en dimension 1

Exercice 1 (Décroissance à l'infini). Soit $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$u'(t) = u(t)\left(u^2(t) + t^2\right)\left(-u^2(t) + u(t) - 1\right), \qquad u(0) = 1.$$

- Montrer que u est positive et décroissante.
- Montrer que $\beta = +\infty$.
- Montrer l'inégalité

$$u(t) \leq t^{-1/4} \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Exercice 2 (Explosion en temps fini).

- Vérifiez que la fonction $u(t) = \dfrac{1}{1-t}$ est une solution de

$$u'(t) = u(t)^2 \quad \text{dans} \quad]-\infty, 1[, \qquad u(0) = 1. \tag{1}$$

  Démontrez que la solution de (1) est unique.
- Soit $v : [0, \alpha[\to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $[0, \alpha[$, dérivable sur $]0, \alpha[$ et telle que

$$v'(t) = v(t)^2 + v(t) - 1 \quad \text{dans} \quad]0, \alpha[, \qquad v(0) = 1. \tag{2}$$

  Démontrez que $\alpha \leq 1$.

Exercice 3. Soit $u_0 \in]0, \pi[$ et $u : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$u'(t) = \sin u(t), \qquad u(0) = u_0.$$

- Démontrez que u est bornée et qu'on a

$$0 < u(t) < \pi \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

- Démontrez que u est une fonction monotone.
- Montrer que $I = \mathbb{R}$.
- Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = \pi$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0$.
- Montrer que pour tout $\alpha < 1$, $|u(t) - \pi| = O(e^{-\alpha t})$ pour $t \to +\infty$.
- Montrer que $|u(t) - \pi| = O(e^{-t})$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 4. Soient $a > 0$, $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Soit $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \exp(u(t)) - 1, \qquad u(0) = a.$$

- Démontrez que u est positive, monotone et convexe.
- Démontrez que $\beta < +\infty$. Peut-on dire quelque chose sur α?

Exercice 5. Soit $a > -1$ une constante donnée et soit x_a la solution de problème de Cauchy

$$x_a' = x_a \log(1 + x_a), \qquad x_a(0) = a.$$

- Démontrer que la solution ne change pas de signe.
- Etudiez l'intervalle maximal d'existence en fonction de a (on pourra distinguer deux cas selon le signe de a).

Exercice 6. Démontrer que le problème de Cauchy

$$y' = 1 + \cos y + t^2, \qquad y(0) = 0$$

admet une unique solution maximale, qui est définie sur $\mathbb{R}$, et que cette solution est impaire. La limite $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ existe-t-elle? Si oui, que vaut-elle?

Exercice 7. Démontrer que le problème de Cauchy

$$y'(t) = \cos\left(\frac{t^2\pi}{1+t^2}\right)\frac{\arctan(y(t))}{1+y(t)^4}, \qquad y(1) = 1$$

admet une unique solution y maximale, qui est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que cette solution est positive. Déterminer les maxima et de minima de y. Calculer les limites $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ et $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Exercice 8. Démontrer que le problème de Cauchy

$$y'(t) = t^2\cos(y(t)), \qquad y(0) = 0$$

admet une unique solution maximale y, qui est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer les limites $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ et $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Exercice 9. Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) En supposant que f ne s'annule pas et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty$, montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x' = f(x),\ x(t_0) = x_0$ est définie sur $]t_0 - T_*, t_0 + T^*[$, où

$$T_* = t_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, T^* = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)}.$$

(2) En supposant que f s'annule en un unique point ξ_0, montrer que l'intervalle de la solution maximale de $x' = f(x),\ x(t_0) = x_0$ n'est pas majoré si $x_0 < \xi_0$, et n'est pas minoré si $x_0 > \xi_0$.

Exercice 10. Soit $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $F \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty,$$

et $||f(t,x)|| \leq F(||x||)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(1) Soit $u \in C(J, \mathbb{R}^n)$ une solution maximale de $u' = f(t,u)$, et posons $r(t) = ||u(t)||$. Montrer que $r'(t) \leq F(r(t))$ pour tout $t \in J$ où $r(t) \neq 0$.
(2) En déduire que u est globale, c.-à-d. que $J = \mathbb{R}$.

Exercice 11. On considère le problème de Cauchy

$$y' = y^2 + e^{-y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

- Démontrer que l'intervalle maximal d'existence I est symétrique par rapport à 0 et que la solution y satisfait $y(t) + y(-t) = 0$.
- Démontrer que $]-\pi/2, \pi/2[\subset I \subset]-\pi, \pi[$.

Exercice 12. On considère le problème de Cauchy

$$y'(x) = \exp(-xy), \qquad y(0) = 0.$$

Montrer que la solution maximale est globale, qu'elle définit une fonction impaire, et que la limite $\lim_{x\to\infty} y(x)$ est finie.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$u'(t) = 2\sin(u(t)) + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(1) Montrer que toute solution maximale est globale.
(2) Existe-t-il une solution maximale bornée?
(3) Existe-t-il une solution périodique?