Master 1**ère année** **Année** 2018 2019

TD de EDO-EDP Feuille n° 2.

Lemme de Gronwall, unicité de la solution et le principe de comparaison

Exercice 1. Soient $\alpha \in C(\mathbb{R})$ et $\beta \in C(\mathbb{R})$ deux fonctions continues et t_0 un nombre réel.

- En utilisant la fonction $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\,dx$, trouvez une solution $u \in C^1(\mathbb{R})$ de
$$u'(t) = \alpha(t)u(t) + \beta(t) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}, \qquad u(t_0) = u_0. \tag{1}$$
- Démontrez que la solution de (1) est unique, c'est-à-dire si la fonction $u :] - \varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ est telle que
$$u'(t) = \alpha(t)u(t) + \beta(t) \quad \text{dans} \quad] - \varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[, \qquad u(t_0) = u_0.$$
alors $u(t) = u_0 e^{A(t)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(A(t)-A(s))}\beta(s)\,ds.$
- **Lemme de Gronwall I.** Soit $v \in C^1(]t_0, \varepsilon + t_0[) \cap C([t_0, t_0 + \varepsilon[)$ une fonction telle que
$$v'(t) \le \alpha(t)v(t) + \beta(t) \quad \text{dans} \quad]t_0, t_0 + \varepsilon[, \qquad v(t_0) = u_0.$$
Démontrez que $v \le u$ sur $[t_0, t_0 + \varepsilon[$.
- Redémontrez l'unicité de la solution de (1) en utilisant Gronwall.

Exercice 2. **Lemme de Gronwall II.** Soient $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ and $\alpha \ge 0$ des nombres réels. Soit $v :] - \varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que
$$|v'(t)| \le \alpha |v(t)| \quad \text{dans} \quad]t_0, t_0 + \varepsilon[, \qquad v(t_0) = u_0. \tag{2}$$

- Démontrez que la fonction $t \mapsto |v(t)|$ est dérivable sur $]t_0, t_0 + \varepsilon[$ et $|v|'(t) \le |v'(t)|$ pour tout $t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[$.
- Démontrez que $|v(t)| \le |u_0| e^{\alpha(t-t_0)}$ pour $t > t_0$. Que peut-on dire pour $t < t_0$?

Exercice 3. Soient $F :] - \varepsilon, \varepsilon[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et u_0 et v_0 deux nombres réels. Soient $u :] - \varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ et $v :] - \varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que
$$\begin{aligned} u'(t) &= F(t, u(t)) \quad \text{sur} \quad] - \varepsilon, \varepsilon[\ , \qquad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= F(t, v(t)) \quad \text{sur} \quad] - \varepsilon, \varepsilon[\ , \qquad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{3}$$
On suppose qu'il existe une constante $L > 0$ telle que
$$|F(t, x) - F(t, y)| \le L|x - y| \quad \text{pour tout} \quad t \in] - \varepsilon, \varepsilon[\quad \text{et} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Démontrez l'inégalité suivante:
$$|u(t) - v(t)| \le |u_0 - v_0| e^{L|t|} \quad \text{pour tout} \quad t \in] - \varepsilon, \varepsilon[.$$
En déduire l'unicité de la solution de (3).

Exercice 4. Soient $\alpha < 0$, $\beta > 0$ et $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution du problème de Cauchy
$$u'(t) = (u^2(t) - 1)(u^2(t) + t), \qquad u(0) = \frac{1}{2}.$$
Démontrer que u est bornée et qu'on a
$$|u(t)| < 1 \quad \text{pour tout} \quad t \in]\alpha, \beta[.$$
Montrer que la solution maximale est globale, c-à-d. définie sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution du problème de Cauchy

$$u'(t) = \sin u(t), \qquad u(0) = u_0.$$

Démontrez que u est bornée et qu'on a

$$|u(t) - u_0| < \pi \quad \text{pour tout} \quad t \in]\alpha, \beta[.$$

Montrer que la solution maximale est globale.

Exercice 6. **Lemme de Gronwall III.** Soient ε et L deux constantes réelles et positives, et u_0 et t_0 deux nombres réels. Soit $u : [t_0, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ une fonction continue est telle que

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_{t_0}^{t} L|u(s)|\, ds, \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[.$$

Montrez qu'alors

$$|u(t)| \leq |u_0| e^{L(t-t_0)}, \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[.$$

Exercice 7 (Unicité de la solution dans un espace de Banach). Soient $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une fonction continue et $u_0 \in \mathcal{B}$ et $v_0 \in \mathcal{B}$ deux vecteurs donnés. Soient $u :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{B}$ et $v :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{B}$ deux fonctions dérivables telles que

$$\begin{aligned} u'(t) &= F(t, u(t)) \quad \text{dans} \quad]-\varepsilon, \varepsilon[, \qquad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= F(t, v(t)) \quad \text{dans} \quad]-\varepsilon, \varepsilon[, \qquad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{4}$$

On suppose qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{pour tout} \quad t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \text{et} \quad x, y \in \mathcal{B}.$$

Démontrez l'inégalité suivante :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| e^{L|t|} \quad \text{pour tout} \quad t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

En déduire que la solution de (4) est unique.

Exercice 8. (Principe de comparaison) Soient $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, Lipschitziennes en leur seconde variable. Soient x, y des solutions globales des problèmes de Cauchy suivants:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que $f(t, x) \leqslant g(t, x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $x_0 \leqslant y_0$. Montrer qu'alors $x(t) \leqslant y(t)$ pour tout $t \geqslant t_0$.

Exercice 9. (Principe de comparaison 2) Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonctions continue, Lipschitzienne en sa seconde variable. Soient x, y deux fonctions de classe C^1 telles que

$$\begin{cases} x'(t) < f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrer qu'alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \geqslant t_0$.