Master 1**ère année** **Année** 2018 2019

TD de EDO-EDP Feuille n° 1.

Techniques élémentaires de résolution d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1

Exercice 1. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $y_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Démontrez que la solution maximale du problème de Cauchy

$$y'(x) = a(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donnée par

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} a(u)\, du.$$

Exercice 2. Soient $a \in C(\mathbb{R})$, $b \in C^1(\mathbb{R})$ deux fonctions données, soit $y_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On suppose $b > 0$ sur $\mathbb{R}$. Démontrez que la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = a(x)b(y(x)), \qquad y(x_0) = y_0,$$

est la fonction $y(x)$ définie implicitement par

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{b(u)} = \int_{x_0}^{x} a(v)\, dv.$$

Exercice 3. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $y_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Démontrez que la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = b(x)y(x) + a(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et est donnée par

$$y(x) = y_0 e^{B(x)} + \int_{x_0}^{x} a(u) e^{B(x)-B(u)}\, du, \quad \text{où} \quad B(x) = \int_{x_0}^{x} b(v)\, dv.$$

Exercice 4. Montrer que la résolution des équations différentielles suivantes se ramène à des cas d'équations standard (variables séparées, équations linéaires,...).

(a) $y' = f(ax + by)$ (on considère $z = ax + by$);

(b) $y' = f(y/x)$ (on considère $z = y/x$);

(c) $y' = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$ avec $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ et $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

En notant $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases},$$

on pourra utiliser le changement de variables $u = x - x_0$ et $v = y - y_0$.

(d) $y' = a(x)y + b(x)y^s$ with $s \neq 0, 1$ (on considère $z = y^{1-s}$).

Exercice 5. Trouvez les solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y' = \dfrac{y - x - 2}{y + x}, \qquad y(0) = c \in \mathbb{R};$

(2) $y' = -\dfrac{y}{x} + x + \dfrac{1}{x}, \qquad y(1) = 1;$

(3) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} y + 1, \qquad y(1) = 0;$

(4) $y' + y \sin x = \sin(2x), \qquad y(\pi/2) = 1;$

(5) $y' = 2\tan(x) y + 2\sqrt{y}, \qquad y(0) = 1;$

(6) $(x^2+1)y' + y^2 = 0, \qquad y(0) = 1;$

(7) $y' = \frac{xy}{(x-1)^2}, \qquad y(2) = 1;$

(8) $y' + x \tan y = 0, \qquad y(0) = \pi/2;$

(9) $y' - y = 1, \qquad y(0) = 0;$

(10) $y' = x(y^2+1), \qquad y(0) = 1;$

(11) $yy' = 1, \qquad y(2) = 2;$

(12) $y'x^2 - (x^2 + y^2 + xy) = 0, \qquad y(1) = 0;$

(13) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \qquad y(1) = 0;$

(14) $y' = (x+y)^2, \qquad y(0) = 1;$

(15) $y' = (x+y)^2 - (x+y) - 1, \qquad y(0) = 1/2;$

(16) $y' = y/x + e^{-y/x}, \qquad y(1) = 0;$

(17) $y' = y^s, \quad s > 0, \qquad y(0) = a > 0;$

(18) $y' = x\sqrt{y-2}, \qquad y(0) = 2;$

(19) $y' = \frac{y}{x} + x\cos(x), \qquad y(\pi/4) = 0;$

(20) $y' = y^2 x^{-2}, \qquad y(1) = 1;$

(21) $y' = -xy^{-2}, \qquad y(0) = 1;$

(22) $y' = \max\{x, y\}, \qquad y(0) = -3/2.$