Université Grenoble Alpes M1 EDO - 2017/18.

Contrôle continu n° 2
13 décembre 2017

Durée: 2h. Documents, téléphones, ordinateurs interdits. Toute réponse doit être justifiée. Barême indicatif: 14/4/12

Exercice 1. On considère le système

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)y(t) \\ y'(t) = \dfrac{x(t)^2 - y(t)}{1 + y(t)^2}. \end{cases}$$

(1) Ecrire le systéme sous la forme $Y' = F(Y)$, en précisant l'application F. Montrer que pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $Y' = F(Y)$, $Y(0) = Y_0$.

(2) Déterminer les points d'équilibre. Pour chacun d'entre eux, donner le système linéarisé correspondant, et étudier sa stabilité.

(3) On note $E(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}y^4$. Montrer que E est une fonction de Lyapounov associée à $(0, 0)$ et au système sur $\mathbb{R}^2$.

(4) Montrer que pour toute solution maximale $Y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^2$, $\beta = +\infty$.

(5) Donner la définition de la propriété "le point $(0, 0)$ est une équilibre asymptotiquement stable du système", et établir cette propriété pour le système auquel on s'intéresse.

(6) Déterminer les trajectoires issues de $(0, 0)$, $(0, a)$ et $(0, -a)$ avec $a > 0$.

On note $\Omega_1 = \{(x, y) : x > 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) : x < 0\}$, et on considère une solution maximale $Y :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ du système avec $Y(0) = Y_0$ (en particulier $\alpha < 0$).

(7) Montrer que si $Y_0 \in \Omega_1$, alors $Y(t) \in \Omega_1$ pour tout t.

(8) Supposons $Y_0 \in \Omega_2$, $Y(t) = (x(t), y(t))$ et $Z(t) = (-x(t), y(t))$ pour $t \in]\alpha, +\infty[$. Montrer que Z est une solution maximale.

On note $\Omega_{1,1} = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$, $\Omega_{1,2} = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x^2 - y > 0\}$, $\Omega_{1,3} = \{(x, y) : x > 0, x^2 - y < 0\}$.

(9) Faire un dessin des régions $\Omega_{1,j}$, $j = 1, 2, 3$.

(10) On suppose $(x_0, y_0) = Y_0 \in \Omega_{1,1}$.
   (a) Montrer que $Y(t) \in \Omega_{1,1}$ pour tout $t \in]\alpha, 0]$.
   (b) Montrer que $0 \leqslant y'(t) \leqslant 1 + x_0^2$ pour tout $t \in]\alpha, 0]$.
   (c) Montrer que $\alpha = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty} x(t) = l \in \mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$.
   (d) Montrer que $l = 0$.

(11) Montrer que si $Y_0 \in \Omega_{1,1}$, alors Y sort de $\Omega_{1,1}$ pour entre dans $\Omega_{1,2}$ au bout d'un temps fini.

(12) Montrer que si $Y_0 \in \Omega_{1,2}$, alors Y sort de $\Omega_{1,2}$ pour entrer dans $\Omega_{1,3}$.

(13) Montrer que si $Y_0 \in \Omega_{1,3}$, alors $Y(t) \in \Omega_{1,3}$ pour tout $t \geqslant 0$, et tend vers $(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

(14) Soit $a > 0$. Dessiner la trajectoire par $(a, -a)$ et celle par $(-a, -a)$.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lambda > 0$. Montrer que les zéros positifs d'une solution non nulle de l'équation $y'' + qy = 0$ sont simples, et forment une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $t_{n+1} - t_n \to \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3. Soit I un intervalle ouvert, $q : I \to \mathbb{R}$ continue, et $[a, b] \subset I$. On cherche les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une solution non nulle au problème de Sturm-Liouville

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} y'' + (q + \lambda)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0. \end{array} \right.$$

On note F_λ l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (S). On appelle λ une valeur propre du problème de Sturm-Liouville si F_λ est non trivial. On note Λ l'ensemble des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville (S), et les éléments non nuls de F_λ sont alors appelées *fonctions propres* du problème.

(1) Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de (S) si et seulement si l'unique solution y_λ de

$$y'' + (q + \lambda)y = 0,\ y(a) = 0,\ y'(a) = 1$$

vérifie $y_\lambda(b) = 0$. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\dim F_\lambda \leqslant 1$.

(2) On note $N(\lambda)$ le nombre de zéros de y_λ dans $[a, b]$. Montrer que N est une fonction croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N(\lambda) \leqslant n + 1$ si $\lambda \leqslant (\dfrac{n\pi}{b-a})^2 - \sup\limits_{[a,b]} q$, et $N(\lambda) \geqslant n + 1$ si $\lambda \geqslant (\dfrac{n\pi}{b-a})^2 - \inf\limits_{[a,b]} q$.

(3) Montrer que l'application $F(x, \lambda) = y_\lambda(x)$ est de classe C^2 sur $I \times \mathbb{R}$.

(4) Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et soient $a = x_1(\lambda_0) < \cdots < x_{N(\lambda_0)}(\lambda_0) \leqslant b$ les zéros de y_λ dans $[a, b]$. En appliquant le théorème des fonctions implicites à F, montrer qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \leqslant N(\lambda_0)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$.

(5) On suppose $\lambda_0 \notin \Lambda$. Montrer que $x_{N(\lambda_0)}(\lambda_0) < b$ et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \geqslant N(\lambda_0)$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$.

(6) On suppose $\lambda_0 \in \Lambda$. Montrer que $x_{N(\lambda_0)} = b$ et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $N(\lambda) \geqslant N(\lambda_0) - 1$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$. Déduire que $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0]$.

(7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $]-\infty, (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \sup_{[a,b]} q]$ contient au plus n points de Λ, et que $]-\infty, (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \inf_{[a,b]} q]$ contient au moins n points de Λ. En déduire que $\Lambda = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ où (λ_n) est une suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$, et que N vaut 1 sur $]-\infty, \lambda_0[$ et $n + 1$ sur $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$.

(8) Montrer que $\lambda_n \sim (\frac{\pi n}{b-a})^2$ lorsque $n \to +\infty$, et que tout fonction propre associée à λ_n admet $n + 1$ zéros dans $[a, b]$.