# Contrôle continu n° 2
# Corrigé rapide

*Exercice* 1. (1) $F(x, y) = (-xy, (x^2 - y)/(1 + y^2))$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz on a existence et unicité locale de tout problème de Cauchy, ce qui donne l'unicité globale (et l'existence d'une unique solution maximale).

(2) $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre. $dF(0, 0)$ est l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base std de $\mathbb{R}^2$, donc le linéarisé est $Y' = AY$, càd. $x' = 0, y' = -y$. Les valeurs propres de $A$ sont réelles $\leq 0$, donc $(0, 0)$ est stable (mais pas asymptotiquement stable).

(3) $E$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et a clairement un minimum local (en fait global) en $(0, 0)$, puisque pour tout $x, y$, $E(x, y) \geqslant E(0, 0) = 0$. La matrice hessienne de $E$ en $(0, 0)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geqslant \alpha Id$ avec $\alpha = 2$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $dE(x, y)(F(x, y)) = -2y^2 \leqslant 0$.

(4) Le calcul de la question précédente montre que $E$ décroit le long des trajectoires, en particulier $E(Y(t))$ est bornée au voisinage de $+\infty$. Ceci implique que $||Y(t)||$ est bornée (puisque $E(x, y) \geqslant ||(x, y)||^2$), donc $\beta = +\infty$ par le lemme des bouts.

(5) Revoir la définition du cours! Par Lyapounov 1, on sait que l'équilibre est stable. On va montrer que pour *toute* condition initiale, la trajectoire tend vers $(0, 0)$, ce qui donne alors le voisinage de la stabilité asymptotique (globale). Ceci découle des points ci-dessous.

(6) $Y(t) \equiv (0, 0)$ est une solution (d'équilibre), donc $\{(0, 0)\}$ est une trajectoire. Il y a une solution de la forme $(0, y(t))$, $y(t) > 0$ pour tout temps; quitte à bien choisir l'origine du paramètre, on a $\ln y + \frac{1}{2}y^2 = t$. Noter que la fonction $\ln y + \frac{1}{2}y^2$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et est bijective sur son image $\mathbb{R}$, donc $y(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $(0, y(t))$ parcourt le demi-axe $y > 0$. Ce demi-axe est donc une trajectoire. En remplaçant $y(t)$ par $z(t) = -y(t)$, on voit que le demi axe $y < 0$ est aussi une trajectoire.

(7) Par la question précédente (et l'unicité dans CL), si $x(t) = 0$ pour un $t$, alors $x(t) = 0$ pour tout $t$. Comme $x$ est continue, le TVI implique que si $x(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ pour tout $t$.

(8) Comme $Y$ est solution, on a $(-x)' = -(-x)y$ et $y' = ((-x)^2 - y)/(1 + y^2)$, donc $Z$ est solution. Clairement $Z$ est maximale ssi $Y$ est maximale (ce qu'on a supposé ci-dessus).

(9) voir (14)

(10) (a) Dans $\Omega_{1,1}$, $x' > 0$ et $y' > 0$ donc $x$ et $y$ sont toutes les deux strictement croissantes. Si $x(t) \leqslant 0$ pour un $t < 0$, alors il s'annule quelque part, mais alors il est nul partout (le demi-axe $y < 0$ est une trajectoire).

(b) Pour $t < 0$, on a $0 < x(t) \leqslant x_0$ donc $x(t)^2/(1+y(t)^2) \leqslant x_0^2$, et $-y(t)/(1+y(t)^2) \leqslant 1$ car $u/(1+u^2) \leqslant 1$ pour $u > 0$ (on peut par exemple montrer que $u \leqslant 1+u^2$ pour tout $u$ en calculant un discriminant).

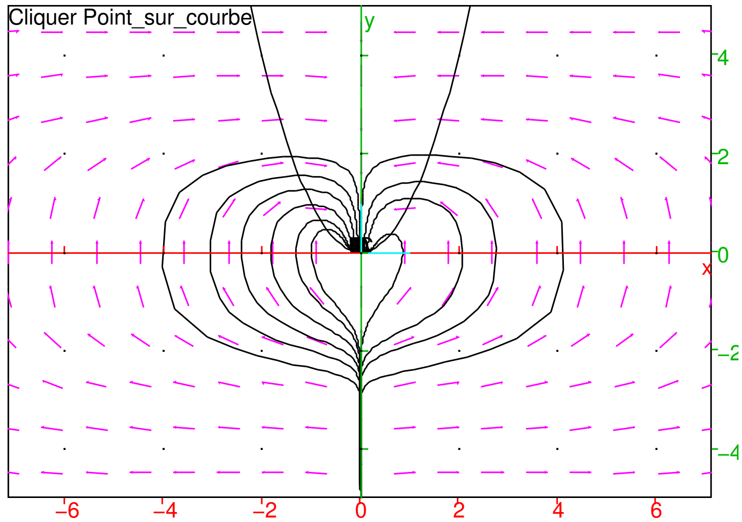
(c) Le point précédent implique que pour $t < 0$, $y(t) \geqslant y_0 + t(1+x_0^2)$, donc si $\alpha > -\infty$, $y$ serait minoré. Comme $x$ l'est aussi, la solution serait bornée en $-\infty$, ce qui contredit le lemme des bouts.
L'affirmation sur $x(t)$ résulte de ce que $x(t)$ croît, donc admet une limite $l$ en $-\infty$ et $x(t) > 0$ pour tout $t < 0$ implique $l \geqslant 0$. Par le théorème de redressement du flot, si $(x(t), y(t))$ convergeait vers $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ lorsque $t \to -\infty$, alors $(c,d)$ serait un point d'équilibre du champ de vecteurs, donc $(c,d) = (0,0)$. Ceci est impossible, puisque $d \leqslant y_0 < 0$.

(d) Comme $x \to l$ et $y \to -\infty$, la règle de l'Hospital dit que si $x'/y'$ a une limite, alors cette limite est nulle. (En effet, la fonction $(x(t)-x(n))/(y(t)-y(n))$ tend vers 0, donc il existe $t_n > n$ tel que $|(x(t_n)-x(n))/(y(t_n)-y(n))| < \varepsilon$. Par le théorème des accroissements finis généralisé, ce quotient est égal $x'(c_n)/y'(c_n)$ pour $c_n > n$. Comme $c_n \to +\infty$ et $|\lim x'/y| < \varepsilon$).
Si $l > 0$, alors $x'/y' = -x\frac{y}{x^2-y}(1+y^2)$ tend vers $+\infty$, contradiction.

(11) Supposons le contraire, auquel cas $x(t), y(t)$ sont monotones. Comme $y$ est majorée, le redressement du flot implique que pour $t \to +\infty$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to l \leqslant 0$. Mais alors $x'(t) = -x(t)y(t) \to -\infty$, ce qui est impossible, $x$ est croissante. Donc il existe un temps $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) = 0$, et $x(t_1) > 0$. En particulier $y'(t_1) > 0$, donc $Y(t)$ entre dans $\Omega_{1,2}$.

(12) Supposons le contraire. Comme dans $\Omega_{1,2}$, $x' < 0$ et $y' > 0$, $x(t)$ est décroissant; ceci implique que la solution est bornée en $+\infty$ et converge donc vers $(0,0)$ (par redressement du flot). Ceci contredit $y$ croissant. Donc il existe un $t_2 > 0$ tel que $y(t_1) = x(t_2)^2 > 0$. Comme le champ de vecteur en ce point est $(-x(t_1)^3, 0)$ avec $x(t_1) < 0$, la solution entre dans $\Omega_{1,3}$.

(13) Dans $\Omega_{1,3}$, $x' < 0$ et $y' < 0$, donc $x(t), y(t)$ décroissent, et ne peuvent pas atteindre la barrière $x = 0$ en temps fini (voir question (6)). La solution ne peut pas non plus rejoindre la parabole $y = x^2$, puisque le champ de vecteurs sur la parabole pointe vers l'intérieur de la parabole. En effet, un vecteur normal à $y = x^2$ pointant vers l'intérieur est donné par $(-2x, 1)$, et sur la parabole $y = x^2$, on a $-2xx' + y' = 2y^2 \geqslant 0$. Donc la solution reste dans $\Omega_{1,3}$. Comme $x(t)$ et $y(t)$ sont minorés, ils convergent vers $(c,d) \in \overline{\Omega_{1,3}}$. Ceci implique que $(c,d) = (0,0)$, car sinon ce ne serait pas un point d'équilibre, et le redressement du flot au voisinage de $(c,d)$ dirait que la trajectoire par $(c,d)$ traverse $(c,d)$.




(14)

*Exercice* 2. Si $y$ avait un zéro double en $t_*$, càd. $y(t_*) = y'(t_*)$, alors par CL $y$ serait identiquement nulle. Donc les zéros sont simples.

Soient $\mu_1, \mu_2 > 0$ tels que $\mu_1^2 < \lambda < \mu_2^2$, et soit $K \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_1^2 < q(t) < \mu_2^2$, et $z_1, z_2$ des solutions non nulles de $z_1'' + \mu_1^2 z_1 = 0$, $z_2'' + \mu_2^2 z_2 = 0$ respectivement. On peut écrire $z_j = A_j \cos(\mu_j t + \phi_j)$ pour des constantes $A_j \neq 0$, $\phi_j \in \mathbb{R}$, et les zéros de $z_j$ sont régulièrement espacés de $\pi/\mu_j$. Par le théorème de comparaison de Sturm, sur un intervalle donné dans $]K, +\infty[$, $z_2$ a plus de zéros que $y$, qui a plus de zéros que $z_1$. Plus précisément, pour $n$ assez grand, $t_n > K$, donc $\pi/\mu_2 \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \pi/\mu_1$.

Pour la deuxième inégalité, on choisit $z_1$ telle que $z_1(t_{n+1}) = 0$, ce qui donne $t_n$ entre $t_{n+1} - \pi/\mu_1$ et $t_{n+1}$.

Pour la première inégalité, on choisit $z_2$ telle que $z_2(t_n) = 0$, ce qui donne $t_{n+1}$ entre $t_n$ et $t_n + \pi/\mu_2$.

On note $\sigma_n = t_{n+1} - t_n$. Alors $\frac{\pi}{\mu_2} \leqslant \liminf \sigma_n \leqslant \limsup \sigma_n \leqslant \frac{\pi}{\mu_1}$, mais $\mu_1$ et $\mu_2$ peuvent être choisis arbitrairement proches de $\sqrt{\lambda}$, donc $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \liminf \sigma_n \leqslant \limsup \sigma_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, ce qui donne $\lim \sigma_n = \pi/\sqrt{\lambda}$.

*Exercice* 3. (1) $\Leftarrow$ est clair, puisqu'alors $y_\lambda$ résout $(S)$, et est non nulle car $y'(a) = 1 \neq 0$. Pour $\Rightarrow$, noter que si $y$ est solution non nulle de $S$, $y'(a) \neq 0$. Quitte à changer $y$ en $\mu y$ pour une constante $\mu \in \mathbb{R}$, on trouve une solution telle que $y'(a) = 1$.

Si $y_1$, $y_2$ sont solutions non nulles de $(S)$, alors $y_1/y_1'(a)$, $y_2/y_2'(a)$ résolvent le même problème de Cauchy $y'' + (a + \lambda)y = 0$, $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$, donc par CL elles sont égales, ce qui montre que $y_1$ et $y_2$ sont proportionnelles.

(2) Par le théorème de comparaison de Sturm, si $\lambda < \lambda'$, alors entre deux zéros consécutifs de $y_\lambda$, il y a un zéro de $y_{\lambda'}$. Comme $y_\lambda$ et $y_{\lambda'}$ s'annulent toutes les deux en $a$, ceci implique que si $N(\lambda) \leqslant N(\lambda')$. Comme les zéros de $y_\lambda$ sont isolés et que $[a, b]$ est compact, $N(\lambda)$ est fini.

On suppose $\lambda + q(t) \leqslant s^2$ avec $s = n\pi/(b-a)$. On note $z(t) = A\cos(st+\phi)$ une solution de $z'' + s^2 z$ qui s'annule en $a$, avec $A \neq 0$. Par construction $z$ s'annule $n+1$ fois dans $[a,b]$. Par comparaison de Sturm, $N(\lambda) \leqslant n+1$.

De même, si suppose $\lambda + q(t) \geqslant s^2$ avec $s = n\pi/(b-a)$, alors $N(\lambda) \geqslant n+1$.

(3) C'est le théorème de dérivabilité des solutions par rapport aux conditions initiales pour $Y' = AY$, $Y = (y, y')$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q-\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Noter que le membre de droite admet des dérivées partielles continues par rapport à $y_1, y_2$ et à $\lambda$, donc la solution $Y(t)$ dépend de façon $C^1$ en $t, \lambda$. Ceci implique que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \lambda}$ existent et sont continues. De plus, comme $v(t) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}$ est solution d'une équation linéaire à coefficients dépendant de façon $C^\infty$ de $\lambda$, on peut aussi lui appliquer le théoreème sur la dépendance en le paramètre $\lambda$, ce qui donne $\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}$ continue.

(4) On cherche les $x$ tels que $F(x,\lambda) = 0$ au voisinage de $(x_j(\lambda_0), \lambda_0)$, que l'on voit comme une équation implicite, que l'on veut expliciter en utilisant $\lambda$ comme paramètre. On doit vérifier $y'_\lambda(x_j(\lambda_0)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_j(\lambda_0), \lambda_0) \neq 0$, mais ceci est clair puisque les zéros de $y_\lambda$ sont simples.

Ceci dit qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, $F(x,\lambda) = 0$ a le même nombre de solutions avec $x \in [a,b]$ que $F(x,\lambda_0) = 0$, sauf peut-être si un des zéros de $y_{\lambda_0}$ est en $x = b$ (un zéro doit subsister près de $b$, mais il pourrait être $> b$).

Donc $N(\lambda) \leqslant N(\lambda_0)$ pour $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$. En particulier c'est vrai pour $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$.

(5) Le fait que $N(\lambda_0) < b$ est évident par la question (1). L'argument donné pour la question (4) montre $N(\lambda) = N(\lambda_0)$ pour $\lambda$ assez proche de $\lambda_0$ (ce qui implique la condition demandée dans l'énoncé).

(6) Le fait que $N(\lambda_0) = b$ est évident par (1). L'argument de (4) dit que $N(\lambda) \geqslant N(\lambda_0) - 1$ pour $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$. Si l'on avait $N(\lambda) = N(\lambda_0)$, alors $y_\lambda$ s'annulerait en $b$, mais alors $y_\lambda$ et $y_{\lambda_0}$ auraient les mêmes zéros, donc $\lambda = \lambda_0$.

(7) On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ des valeurs de $\Lambda$ dans l'intervalle $]-\infty, (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \sup_{[a,b]} q]$. Clairement $N(\lambda_1) \geqslant 2$, et le résultat du point (6) montre que $N(\lambda_k) < N(\lambda_{k+1})$, donc $N(\lambda_k) \geqslant k+1$. En utilisant (2), on a $N(\lambda_k) \leqslant n+1$, donc $k \leqslant n$.

La question (5) montre que $N$ est localement constante sur $\mathbb{R} \setminus \Lambda$, et saute de 1 au passage de chaque élément de $\Lambda$. On a donc $N(\lambda) = 1$ pour $\lambda < \lambda_1$ et $N(\lambda) = k$ pour $\lambda_{k-1} < \lambda < \lambda_k$ ($k \geqslant 2$). En particulier, si $N(\lambda) \geqslant n+1$, alors il y a au moins $n$ valeurs de $\Lambda$ à gauche de $\lambda$.

(8) Le point précédent montre que

$$(\frac{(n-1)\pi}{b-a})^2 - \sup q \leqslant \lambda_n \leqslant (\frac{n\pi}{b-a})^2 - \inf q,$$

ce qui implique que $\lambda_n / (\frac{n\pi}{b-a})^2 \to 1$. Il résulte de la discussion du point (7) que $N(\lambda_n) = n+1$, ce qui donne le deuxième résultat, puisque les fonctions propres correspondantes sont les multiples de $y_{\lambda_n}$.