Université Grenoble Alpes IM^{2}AG - M1 Math - 2018/19.

Contrôle continu n° 1
17 octobre 2018

Durée: 1h45. Documents, téléphones, ordinateurs interdits. Toute réponse doit être justifiée. Barême indicatif: 2/4/6/8

Exercice 1. Enoncer et démontrer une version du lemme de Gronwall.

Exercice 2. Pour chaque problème de Cauchy ci-dessous, dcrire toutes les solutions maximales (ainsi que leur intervalle de définition):

(1) $y' = y^2$, $y(0) = 1$;

(2) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{t}} + 1$, $y(1) = 0$;

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y' = (1-y)(y+t).$$

(1) Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ admet une et une seule solution maximale.

(2) Montrer que si $y_0 = -t_0$, alors la solution est globale, et tend vers 1 quand $t \to \pm\infty$.

(3) Montrer que si $t_0 = 0$ et y_0 est très négatif, alors l'intervalle de définition de la solution maximale est de la forme $]-\infty, \beta[$ pour un $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{t} + \sqrt{y} \qquad (*)$$

(1) Pour quels $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$?

(2) Pour ces valeurs, montrer qu'il existe une unique solution maximale, et décrire son comportement qualitatif.

Dans la suite, on considère le problème de Cauchy $y(0) = 0$, où les dérivées en 0 sont à interpréter comme des dérivées à droite. Soit $u : [0, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ une solution.

(4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que u est minorée par $Ct^{3/2}$ sur $[0, \varepsilon[$.

(5) Montrer que le problème de Cauchy $y(0) = 0$ admet une et une seule solution maximale.

Dans la suite, on note $u : [0, \beta[\to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale de la question précédente.

(6) Montrer que $\beta = +\infty$ et décrire le comportement qualitatif de u.

(7) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^2}$ existe, et la calculer.

(8) Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{u(t)}{t^{3/2}}$ existe, et la calculer.