Université Grenoble Alpes IM^{2}AG - M1 Math - 2018/19.

Contrôle continu n° 1
17 octobre 2018

Durée: 1h45. Documents, téléphones, ordinateurs interdits. Toute réponse doit être justifiée. Barême indicatif: 2/4/6/8

Exercice 1. Enoncer et démontrer une version du lemme de Gronwall.

Exercice 2. Pour chaque problème de Cauchy ci-dessous, décrire toutes les solutions maximales (ainsi que leur intervalle de définition):

(1) $y' = y^2$, $y(0) = 1$; Il s'agit d'une équation de la forme $y' = f(t, y) = g(y)$ avec f de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}^2$, donc localement Lipschitzienne en y. CL local s'applique en tout point (t_0, y_0), ce qui implique qu'il existe une et une seule solution maximale. On vérifie facilement que $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1/(1-t)$ est solution, et elle est visiblement maximale puisque $f(t) \to +\infty$ lorsque $t- > 1^-$.

(2) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{t}}+1$, $y(1) = 0$; Ici $f(t, y) = \frac{y}{\sqrt{t}}+1$ est définie seulement sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, mais elle y est C^∞, donc localement Lipschitzienne en y. Une fois de plus, ceci donne l'existence et l'unicité d'une solution maximale. Comme l'équation est linéaire (sous forme résolue pour y), la solution maximale est définie sur tout l'intervalle o les coefficients sont continus, savoir $]0, +\infty[$; de plus, on a une formule explicite pour la solution, savoir $c(t)e^{-2\sqrt{t}}$ et $c(t)$ telle que $c'(t) = e^{-2\sqrt{t}}$, ou encore $c(t) = -(\frac{1}{2} + \sqrt{t})e^{-2\sqrt{t}} + d$ pour une constante $d \in \mathbb{R}$. Comme on veut $y(1) = 0$, on veut $c(1) = 0$, cd. $d = -3e^2/2$. L'unique solution évoquée ci-dessus est donc donnée pour tout $t > 0$ par $f(t) = -1/2 - \sqrt{t} - \frac{3}{2}e^{2(\sqrt{t}-1)}$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y' = (1 - y)(y + t).$$

(1) Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ admet une et une seule solution maximale. Comme ci-dessus, puisque $f(t, y) = (1 - y)(y + t)$ est C^∞ sur tout $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que si $y_0 = -t_0$, alors la solution est globale, et tend vers 1 quand $t \to \pm\infty$.

On suppose $y_0 > 1$ (donc $t_0 < -1$), et on note $y : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale. On a alors $y(t) > 1$ pour tout $t \in J$, par unicité dans Cauchy-Lipschitz et le fait que $y \equiv 1$ est une solution (constante) de l'équation différentielle.

On considère la fonction $p(t) = y(t) + t$; noter que pour tout t, $p'(t) = y'(t) + 1$, mais si $p(t) = 0$, alors $y'(t) = 0$ donc $p'(t) = 1$. Ceci implique que p ne s'annule qu'une fois, donc uniquement en t_0. On a donc que y est (strictement) croissante avant t_0, décroissante après t_0.

Comme y est minorée (par -1), le lemme des bouts implique que $J = \mathbb{R}$.

Par monotonie, les limites $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \alpha_\pm$ sont bien définies (et $1 \leqslant \alpha_\pm < y_0$). Si $\alpha_+ > 1$, $\lim_{t\to+\infty} = -\infty$, ce qui est impossible puisque y est C^1 et a une limite finie. De mme, si $\alpha_- > 1$, $\lim_{t\to-\infty} = +\infty$, ce qui est tout aussi impossible.

Conclusion: $\alpha_+ = \alpha_- = 1$.

Le raisonnement pour $y_0 < 1$ est similaire (avec les croissance/décroissance inversées).

(3) Montrer que si $t_0 = 0$ et y_0 est très négatif, alors l'intervalle de définition de la solution maximale est de la forme $]-\infty, \beta[$ pour un $\beta \in \mathbb{R}$.

On note que si $y = -2t$, $y \leqslant -2$ et $t \geqslant \frac{2}{3}$, alors $f(t,y) = -t(1-y) < -2$. En particulier, pour toute solution de l'équation différentielle telle que $y(2/3) \leqslant -2$, le graphe de y reste en dessous de $y = -2t$ pour $t \geqslant 2/3$.

Mais $y \leqslant -2t$ donne $t \geqslant -y/2$, donc on obtient $(1-y)(y+t) \leqslant (1-y)y/2 \leqslant -y^2/2$ (noter que $1 - y > 0$). On sait que les solutions négatives de $y' = -y^2/2$ explosent en temps fini (dans la direction positive) donc par comparaison les solutions de $y' = (1-y)(y+t)$ aussi.

Si on sait qu'il existe une valeur de y_0 pour laquelle la solution explose en temps fini (dans la direction positive), on a gagné (par comparaison, les conditions initiales plus négatives explosent aussi).

Supposons par l'absurde que pour tout y_0, la solution est globale. Supposons que $y_0 < -2$. Alors entre $t = 0$ et $t = 2/3$, la solution reste en dessous de -2 (car $f(t,-2) = -6 + 3t < 0$), donc on a l'hypothèse $y(2/3) \leqslant -2$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y' = \sqrt{t} + \sqrt{y} \qquad (*)$$

(1) Pour quels $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$? On peut sur $U = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Noter que pour tout t, la fonction $y \mapsto \sqrt{t} + \sqrt{y}$ n'est lipschitzienne sur aucun voisinage de 0.

(2) Pour ces valeurs, montrer qu'il existe une unique solution maximale, et décrire son comportement qualitatif. Toute solution est toujours strictement croissante car $y'(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ (sauf ventuellement si $t = 0$ et $y(0) = 0$).

Grâce à Cauchy-Lipschitz (unicité locale partout dans U), on obtient une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}_+$ dont le graphe est contenu dans U. On note α l'extrémité gauche de I, et on considère $\lambda = \lim_{t\to\alpha^+} y(t)$. Si $\lambda > 0$, alors $\alpha = 0$ et $\alpha \in I$; sinon $\alpha \geqslant 0$. Si $\alpha > 0$, $y'(\alpha) > 0$ donc la solution ne peut pas sétendre à gauche de α (on devrait avoir $y(t) < 0$ pour $t < \alpha$, mais léquation n'a pas de sens pour $y < 0$), on peut létendre sur $\alpha \cup I$. Si $\alpha = 0$, $\alpha \in I$.

Dans la suite, on considère le problème de Cauchy $y(0) = 0$, où les dérivées en 0 sont à interpréter comme des dérivées à droite. Soit $u : [0, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ une solution.

(4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que u est minorée par $Ct^{3/2}$ sur $[0, \varepsilon[$. Ceci découle par comparaison en utilisant $\sqrt{t} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{t}$, qui donne $y(t) = \int_0^t y'(s)ds \geqslant \frac{2}{3}t^{3/2}$.

(5) Montrer que le problème de Cauchy $y(0) = 0$ admet une et une seule solution maximale. Si u et v sont deux solutions, et $w = u - v$, alors au moins au voisinage de 0 on a $w' = u' - v' = \sqrt{u} - \sqrt{v} = w/(\sqrt{u} + \sqrt{v}) \leqslant w\frac{t^{-3/4}}{2\sqrt{2/3}}$, par la question (4).

Gronwall dit que $e^{Ct^{1/4}}w(t)$ est décroissante, mais si $w(0)=0$, ceci donne $w(t)=0$ pour tout t. Donc $u=v$ près de 0, donc elles coïncident partout (par Cauchy-Lipschitz sur U)

Dans la suite, on note $u:[0,\beta[\to\mathbb{R}$ l'unique solution maximale de la question précédente.

(6) Montrer que $\beta=+\infty$ et décrire le comportement qualitatif de u. On sait que $y(t)\geqslant\frac{2}{3}t^{3/2}$, donc à partir d'un certain temps, on a $y(t)\geqslant 1$, et fonc $\sqrt{y(t)}\leqslant y(t)$. Pour t assez grand, on compare avec l'équation linéaire $y'=\sqrt{t}+y$, dont les solutions sont globales.

(7) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u(t)}{t^2}$ existe, et la calculer.

Par comparaison, comme $y'\geqslant\sqrt{y}$, on a pour tout t, $y(t)\geqslant\frac{t^2}{4}$. On calcule la dérivée $(\frac{y}{t^2})'=\frac{ty'-2y}{t^3}=\frac{t\sqrt{t}+t\sqrt{y}-2y}{t^3}$, et on veut montrer que cette dérivée est négative. On voit le numérateur comme une fonction quadratique de $x=\sqrt{y}$, qui est négative lorsque $x>\frac{-t+\sqrt{t^2+8t\sqrt{t}}}{-2}=\frac{t}{2}(1-\sqrt{1+\frac{8}{\sqrt{t}}})$. En particulier, elle est négative pour $x>\frac{t}{2}$. Comme $y(t)^2\geqslant\frac{t^2}{4}$, y/t^2 est décroissante, d'où l'existence de la limite, que l'on note α.

Alors par la règle de l'Hospital, $\alpha=\lim\frac{y}{t^2}=\lim\frac{y'}{2t}=\frac{1}{2}\lim\frac{\sqrt{y}}{t}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$, donc α ne peut valoir que 0 ou $1/4$. Comme $y(t)^2\geqslant\frac{t^2}{4}$, $\alpha=1/4$.

(8) Montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{u(t)}{t^{3/2}}$ existe, et la calculer. Comme y est dérivable en 0 et $y(0)=y'(0)=0$, on a $y(t)=o(t)$ pour $t\to 0$, donc pour tout $\epsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $y(t)\leqslant\epsilon t$ pour $t<\delta$.

En injectant ceci dans l'équation différentielle, on a $y'(t)\leqslant(1+\sqrt{\epsilon})\sqrt{t}$, donc $y(t)\leqslant(1+\sqrt{\epsilon})\frac{2}{3}t^{3/2}$. Comme $\epsilon>0$ est arbitraire, ceci donne $\lim_{t\to 0}y(t)/t^{3/2}=2/3$.