Université Grenoble Alpes IM^{2}AG - M1 Math - 2017/18.

Contrôle continu n° 1
24 octobre 2017

Durée: 2h. Documents, téléphones, ordinateurs interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. (1) Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz (local).

(2) Donner un exemple de problème de Cauchy dont la solution n'est pas unique (justifier votre réponse).

Exercice 2. (1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$, pour $a, l \in \mathbb{R}$. Montrer que $l = 0$.

(2) Donner un exemple de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$, mais pour laquelle on n'a pas $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée.

(3) Montrer que toute solution maximale de l'équation autonome $y' = g(y)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

(4) Montrer que si une solution de $y' = g(y)$ satisfait $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe un $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(\beta) = 0$.

Exercice 3. Décrire toutes les solutions maximales de l'équation différentielle

$$ty' - y = \sqrt{t^2 + y^2}.$$

Indication: pour calculer $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$, *on pourra poser* $u = \text{sh}v$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $F \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty,$$

et $||f(t,x)|| \leq F(||x||)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(1) Soit $u : J \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $u' = f(t,u)$, et posons $r(t) = ||u(t)||$. Montrer qu'en tout point $t \in J$ où $r(t) \neq 0$, r est dérivable et $r'(t) \leq F(r(t))$.

(2) En déduire que u est globale, c.-à-d. que $J = \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit I un intervalle ouvert. On dit qu'une fonction dérivable $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est une barrière inférieure (resp. supérieure) sur I pour l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ si pour tout $t \in I$, on a $\alpha'(t) < f(t,\alpha(t))$ (resp. $\alpha'(t) > f(t,\alpha(t))$). On suppose f continue et de classe C^1 par rapport à sa deuxième variable.

(i) Montrer que si α est une barrière inférieure sur I et si u est une solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ vérifiant $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, alors $\alpha(t) < u(t)$ pour tout $t \in I$ avec $t > t_0$.

(ii) Enoncer un résultat analogue pour une barrière supérieure.

Dans la suite, on considère l'équation

$$(*) \qquad y' = y^2 - t,$$

et on note $u : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale, où $I =]a,b[$ (on autorise éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$).

(iii) Montrer que $a \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire aucune solution maximale n'est globale à gauche). *Indication: on pourra raisonner par l'absurde, et commencer par montrer que si $a = -\infty$, alors il existe un $t_1 < 0$ tel que $u(t_1) < 0$.*

(iv) Montrer que $\alpha_1(t) = -\sqrt{t}$, $\alpha_2(t) = \sqrt{t+1}$ sont des barrières inférieures sur $]0,+\infty[$ pour $(*)$, que $\beta_1(t) = -\sqrt{t-1}$ est une barrière supérieure sur $]\frac{5}{4},+\infty[$, et $\beta_2(t) = \sqrt{t}$ est une barrière supérieure sur $]0,+\infty[$.

(v) Montrer que si pour un $t_0 \geqslant 1$ on a $\alpha_1(t_0) < u(t_0) < \beta_1(t_0)$, alors $b = +\infty$, et étudier le comportement de $u(t)$ quand $t \to +\infty$.

(vi) Le but de la suite est d'étudier ce que l'on peut dire si $\beta_2(t_0) < u(t_0) < \alpha_2(t_0)$ pour un certain $t_0 \geqslant 0$. Dans la suite, on considère les solutions définies au voisinage de 0.

  (a) Montrer qu'il existe un $\lambda \in]0,1[$ tel que si $u(0) = \lambda$, alors $b = +\infty$ et $\beta_2(t) < u(t) < \alpha_2(t)$ pour tout $t > 0$.

  (b) Montrer que le λ comme dans la question (a) est unique (dans la suite de l'énoncé, λ désigne cette unique valeur).

  (c) Montrer que si $u(0) > \lambda$, alors $b < +\infty$ (on pourra montrer qu'alors $u(t) \geqslant \sqrt{2t}$ pour t suffisamment grand).

  (d) Montrer que si $u(0) < \lambda$, alors $b = +\infty$, et décrire le comportement asymptotique de la solution.

(vii) Faire un dessin donnant l'allure des solutions maximales qui résume les discussions ci-dessus.