Université Grenoble Alpes IM²AG - M1 Math - 2017/18.

Corrigé du contrôle continu n° 1

Exercice 1. cf. cours

Exercice 2. (1) Si $l \neq 0$, disons $l > 0$ (on peut le supposer quitte à remplacer f par $-f$). Soit M tel que $f'(x) > l/2$ pour $x > M$. Alors pour $x > M$ on a $f(x) - f(M) = f'(c)(x-M)$ pour un c entre M et x, donc $f(x) > f(M) + \frac{l}{2}(x-M)$, mais cette expression tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, ce qui condredit le fait que f converge vers a.

(2) On peut prendre par exemple $f(x) = \sin(x^2)/x$ sur $]1, +\infty[$ (et l'étendre à $\mathbb{R}$ de façon C^1).

(3) Comme g est de classe C^1, elle est localement lipschitzienne, et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique au voisinage de tout point $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit alors $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ une solution maximale, qui est C^1 comme g est continue.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)ds = y(0) + \int_0^t g(y(s))ds$, donc $|y(t)| \leqslant |y(0)| + Mt$, où $M \in \mathbb{R}$ est une borne supérieure pour $|g|$.

Cette formule montre que $y(t)$ est bornée lorsque $t \to \beta^-$, donc le lemmme des bouts implique que $\beta = +\infty$.

Alternativement, on peut redémontrer ce résultat; si $\beta < +\infty$, y est uniformément continue sur $]\beta - \epsilon, \beta[$ (grâce à la borne sur sa dérivée), donc elle admet une limite l quand $t \to \beta^-$ (par le critère de Cauchy). Cauchy-Lipschitz donne une unique solution (locale) pour la condition initiale $y(\beta) = l$, qui contredit la maximalité à droite de la solution.

L'argument est presque le même pour $\alpha = -\infty$.

(4) Sous les hypothèses, l'équation différentielle donne $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} g(y(t)) = g(\alpha)$ par continuité de g (en $\alpha \in \mathbb{R}$). Alors la partie (1) implique que $g(\alpha) = 0$.‘

Exercice 3. Pour $t > 0$, l'équation est équivalente à $y' = \frac{y}{t} + \sqrt{1 + (\frac{y}{t})^2}$, et pour $t < 0$ elle est équivalente à $y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + (\frac{y}{t})^2}$ (puisque dans ce dernier cas $t = -\sqrt{t^2}$). En posant $z = y/t$, l'équation devient $z'(t)/\sqrt{1 + z(t)^2} = 1/|t|$.

Pour $t > 0$, on trouve a$rgsh(z(t)) = \ln t + C$, ou encore $y(t) = (Kt^2 - 1/K)/2$ pour une constante $K > 0$ arbitraire (hormis le fait d'être positive). De même, pour $t < 0$, on trouve $z(t) = \mathrm{sh}(-\ln(-t) + D)$, ce qui donne $y(t) = (Lt^2 - 1/L)/2$, pour une constante $L > 0$.

Ceci donne deux familles de solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, mais il est clair qu'en prenant $K = L$, ces deux solutions se recollent en un fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, donnée par $y(t) = (Kt^2 - 1/K)/2$.

Noter que Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas au voisinage de $(0, a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ (l'équation sous forme résolue a un membre droite singulier en $t = 0$). En revanche, si $y(t)$ est une solution définie sur un voisinage de 0 avec $y(0) = a$, alors $0 \cdot y'(0) - a = \sqrt{0^2 + a^2}$, donc $a < 0$. Par ailleurs, pour $t < 0$, $y(t)$ doit valoir $(Kt^2 - 1/K)/2$, donc $K = -1/2a$. De même, pour $t > 0$, on obtient la même formule.

Donc toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$, et données par $a - t^2/4a$ pour un $a < 0$.

Exercice 4. (1) Comme u est différentiable, $||u(t)||^2$ est différentiable, et $r(t)$ l'est aussi en tout t où $u(t) \neq 0$ (puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$). De plus, pour un tel t, $r'(t) = \langle u(t), u'(t)\rangle / r(t) = \langle u(t), f(t, u(t))\rangle / r(t)$, donc $r'(t) \leqslant ||f(t, u(t))|| \leqslant F(||u(t)||) = F(r(t))$ (on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

(2) Soit $J =]\alpha, \beta[$, et supposons que $\beta < +\infty$. Alors, par le théorème des bouts, $r(t) \to +\infty$ quand $t \to \beta^-$. En particulier, il existe un t_1 tel que $r(t)$ ne s'annule pas sur $]t_1, \beta[$, et la partie (1) donne $\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{du}{F(u)} \leq t - t_0 \leq \beta - t_0$, ce qui contredit l'hypothése sur l'intégrale de $1/F$. L'argument pour montrer que $\alpha = -\infty$ est similaire.

Exercice 5. (i) On pose $w(t) = \alpha(t) - u(t)$ (on veut montrer que $w(t) < 0$ pour $t < t_0$. Supposons qu'il existe un $t > t_0$ tel que $w(t) > 0$, et notons $t_1 = \inf\{t > t_0 | w(t) = 0\}$ (par continuité et le théorème des valeurs intermédiaires, cet ensemble est non-vide). Par continuité de w, on a $w(t_1) = 0$, mais par définition de l'infimum (et le théoreème des valeurs intermédiaires) on a $w(t) < 0$ pour tout t entre t_0 et t_1.

Par ailleurs $w'(t_1) = \alpha'(t_1) - u'(t_1) < f(t_1, \alpha(t_1)) - f(t_1, u(t_1)) = 0$, puisque $\alpha(t_1) = u(t_1)$. Donc w est strictement décroissante au voisinage de t_1, ce qui contredit $w(t) < 0$ pour $t < t_1$.

Noter que cet argument n'utilise aucune hypothèse sur f.

(ii) si α est une barrière supérieure sur I et si u est une solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ vérifiant $\alpha(t_0) \geqslant u(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, alors $\alpha(t) > u(t)$ pour tout $t \in I$ avec $t > t_0$.

(iii) On suppose que ce n'est pas le cas. Pour $c < d$, on a $u(d) = u(c) + \int_c^d (u(s)^2 - s) ds \geqslant u(c) - (d^2 - c^2)/2$, donc $u(c) \leqslant u(d) + (d^2 - c^2)/2$, qui tend vers $-\infty$ quand $c \to -\infty$. Donc il existe un t_1 comme dans l'indication. Si v désigne l'unique solution de $v' = v^2$ avec $v(t_1) = u(t_1)$, on a $u(t) \leqslant v(t)$, mais $v(t) = -1/(t - t_1 - 1/v(t_1))$ tend vers $-\infty$ en $t_1 + 1/v(t_0) < t_1$.

(iv) Calcul élémentaire.

(v) Supposons que $t_0 \geqslant 5/4$. Alors par le point précédent, u est coincée entre α_1 et β_1 pour tout $t > t_0$. Si $b < +\infty$, par le lemme des bouts, $\lim_{t \to b^-} = -\infty$, mais cette limite est minorée par $\alpha_1(b)$. Si $1 \leqslant t_0 \leqslant 5/4$, on montre que $u(t) \leqslant \beta_1(t)$ pour t assez grand (cf. la preuve de (d)).

(vi) Les barrières inférieure α_2 et supérieure β_2 donnent que si u sort de la région entre α_2 et β_2, alors elle n'y revient jamais. En particulier, en remontant dans le passé, on voit que si $u(t_1) = \beta_2(t_1)$ ou $u(t_1) = \alpha_2(t_1)$, alors u est entre β_2 et α_2 pour tout t entre 0 et t_1 (en particulier dans ce cas l'intervalle de définition contient $[0, t_1]$, par le lemme des bouts).

(a) Pour $t_1 > 0$, on note $\lambda(t_1)$ la valeur en 0 de la solution telle que $u(t_1) = \beta_2(t_1)$ (resp. $\mu(t_1)$ la valeur en 0 de la solution telle que $u(t_1) = \alpha_2(t_1)$).

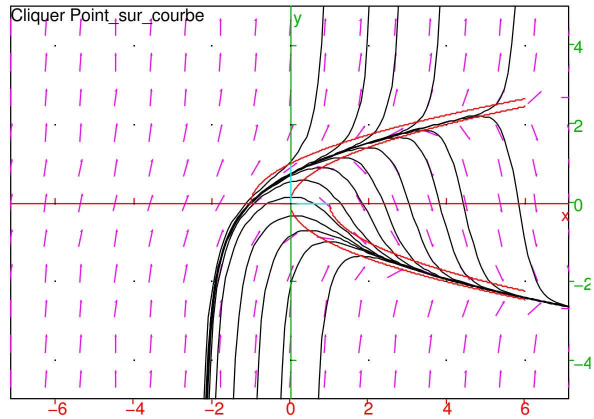
Noter que λ et μ sont définies sur $\mathbb{R}^+$, continues (par continuité du flot), $\lambda(t) < \mu(t)$ pour tout $t > 0$, et λ croît (resp. μ décroît). On note $l = \lim \lambda$, $m = \lim \mu$. Pour tout $\lambda \in [l, m]$, on a alors une solution globale (par le théorème des bouts et Cauchy-Lipschitz).

(b) On veut montrer que $l = m$. Supposons qu'il existe deux solutions u, v avec condition initiales entre 0 et 1 et qui sont globales à droites. Noter que u et v sont alors toutes deux équivalentes à $\sqrt{t}$ (elles restent entre β_2 et α_2).
Pour $w(t) = u(t) - v(t)$, on a alors $w'(t) = w(t)(u(t) + v(t))$, donc si w ne s'annule pas, $2\kappa_1\sqrt{t}w(t) \leqslant w'(t) \leqslant 2\kappa_2\sqrt{t}w(t)$, pour $0 < \kappa_1 < 1 < \kappa_2$, et pour t assez grand.
Par comparaison, avec les solutions de $w' = 2\kappa_j w\sqrt{t}$, on a alors $w(0)e^{\frac{4\kappa_1}{3}t^{3/2}} \leqslant w(t) \leqslant w(0)e^{\frac{4\kappa_2}{3}t^{3/2}}$ ce qui n'est possible que si $w(0) = 0$, puisque w est majorée par $2\sqrt{t}$.

(c) Dans ce cas, il existe un t_1 tel que $u(t) > \sqrt{t+1}$ pour tout $t > t_1$, mais alors comme $u'(t) = u(t)^2 - t > 1$, $u(t) \geqslant u(t_1) + t - t_1$, qui est plus grand que $\sqrt{2t}$ pour t assez grand. Donc il existe un $t_2 > t_1$ tel que $u(t) > \sqrt{2t}$ pour tout $t > t_2$. On utilise alors cette estimation dans l'équation différentielle pour avoir $u' = u^2 - t \geqslant u^2 - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}u^2$, et on compare avec les solutions de $y' = \frac{1}{2}y^2$.

(d) Dans ce cas, il existe un t_1 tel que $u(t) < \sqrt{t}$ pour tout $t < t_1$, et la barrière inférieure α_1 donne alors $b = +\infty$. Comme la solution décroit pour $t > 0$, elle admet une limite en $+\infty$, mais cette limite ne peut que valoir $-\infty$ (si $\lim u(t) = \alpha$, alors $u'(t) \to -\infty$, ce qui est impossible). En particulier, u est négative à partir d'un certain temps.
On vérifie maintenant que $u(t)$ ne peut pas rester au dessus de $-\sqrt{t-1}$. En effet, soit t_1 tel que $u(t) < 0$ pour $t > t_1$. Supposons de plus que $0 > u(t) > -\sqrt{t-1}$ pour tout $t > t_1$. Alors pour ces mêmes valeurs de t, $u'(t) = u(t)^2 - t < t - 1 - t = -1$, donc $u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^t u'(s)ds < u(t_1) - t - t_1$. Ceci implique que $u(t) < -\sqrt{t-1}$ pour t assez grand.
On se retrouve alors dans le même cas que (v), et la solution est équivalente à $-\sqrt{t}$ pour $t \to +\infty$.

(vii)


Cliquer Point_sur_courbe
y
x
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6