Université Grenoble Alpes
Année académique 2016-17

L3 Math

Examen
22 juin 2017

Durée 3h. Téléphones, ordinateurs, documents interdits. Sauf mention explicite du contraire, toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. (environ 4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

(1) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0, une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi(0) = 1$, et telle qu'au voisinage de $(0,1)$, les relations $f(x,y) = 0$ et $y = \varphi(x)$ soient équivalentes.
(2) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, et un développement limité à l'ordre 2 de φ autour de $x = 0$.
(3) Dessiner l'allure de l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$ au voisinage de $(0,1)$, ainsi que sa tangente en ce point.

Exercice 2. (environ 3 pts) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = 2xy^2 - xy + x^3y$, et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 2\}$.

(1) Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f autour de $(1,1)$.
(2) Faire un dessin de la région C.
(3) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur C.
(4) Calculer $\min\limits_C f$ et $\max\limits_C f$.

Exercice 3. (environ 5 pts) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $a = (a_1, a_2) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

(1) Rappeler la définition du graphe S de f, ainsi que du plan tangent à S au point $(a, f(a))$.
(2) Rappeler la définition de la hessienne $\mathrm{Hess}_f(a)$.
(3) Montrer que si $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive, alors il existe un voisinage de a sur lequel le graphe de f est au dessus de celui de son plan tangent. Que se passe-t-il si $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie négative?

On considère maintenant $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x - 2(x^2 + y^2)^2$, et on note S son graphe.

(4) Quel est le point du graphe avec $x = 1$, $y = 2$?
(5) Donner une équation du plan tangent à S en ce point.
(6) Donner la position du graphe de f par rapport à son plan tangent près de ce point.

Exercice 4. (environ 6 pts) On considère le système différentiel de deux fonctions inconnues y_1, y_2 donné par

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases}$$

(1) Montrer que le problème de Cauchy $y_1(0) = \alpha_1, y_2(0) = \alpha_2$ pour (H) a une et une seule solution, définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Donner la solution générale du système.
(3) En déduire l'exponentielle e^{tA}, où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Donner la résolvante $R_{t_0}^{t_1}$ du système, pour $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ quelconques.

On considère maintenant le système

$$(\mathrm{NH}) \quad \begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' = 2y_2 + t \end{cases}$$

(5) Donner la solution générale du système (NH).
(6) Résoudre le problème de Cauchy pour (NH) avec $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$.

Exercice 5. (environ 3 pts) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, telle que $df(t)$ est injective pour tout $t \in I$.

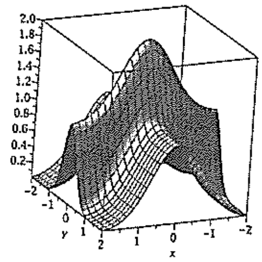
(1) Montrer que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.
(2) Montrer que f est localement injective, c'est-à-dire que pour tout $t_0 \in I$, il existe un voisinage V de t_0 dans I tel que la restriction $f|_V$ est injective.

Exercice 6. (environ 3 pts) On considère les fonctions

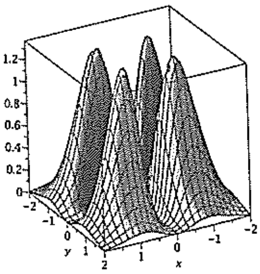
$$f_1(x,y) = x^2 - y^2, \; f_2(x,y) = \frac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \; f_3(x,y) = \sin x + \sin y,$$

$$f_4(x,y) = e^{-x^2} + e^{-4y^2}, \; f_5(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}, \; f_6(x,y) = y^4 - 8y^2 - 4x^2.$$

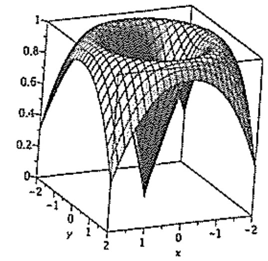
Les dessins ci-dessous donnent les graphes et l'allure de quelques ensembles de niveau de la fonction, mais ces dessins ont été mélangés. Donner la correspondance entre les fonctions et les dessins (exceptionnellement et pour cette question uniquement, on ne demande pas de justification).



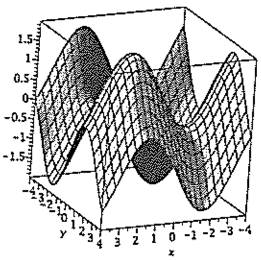
(1)



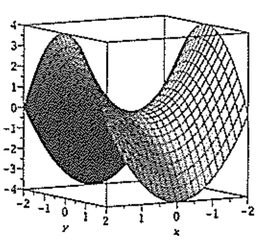
(2)



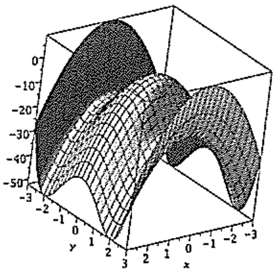
(3)



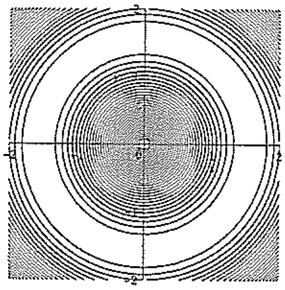
(4)



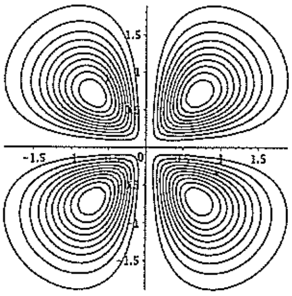
(5)



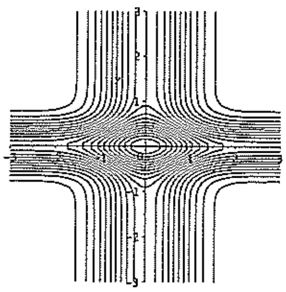
(6)



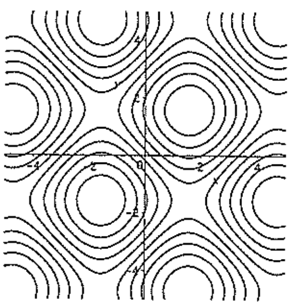
(A)



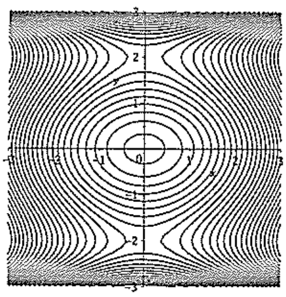
(B)



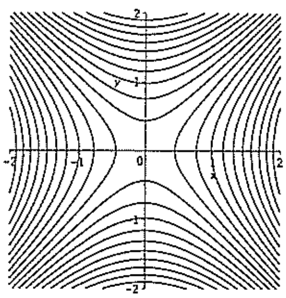
(C)



(D)



(E)



(F)