Université Joseph Fourier
Calcul Différentiel

2013-14
L3 option B

Partiel - 25 avril 2014

durée 2h

Exercice 1. 1. *Soit* $f : U \to \mathbb{R}^n$, *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^m$, *et soit* $a \in U$. *Donner la définition de la différentiabilité de* f *en* a.

2. *Démontrer que si* f *comme ci-dessus est différentiable en* a, *alors* f *est continue en* a. *La réciproque est-elle vraie? (Justifiez votre réponse!)*

3. *Soit* $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *une application linéaire.*

   (a) *Démontrer que* L *est différentiable en tout point* $X \in \mathbb{R}^n$, *et calculer sa différentielle au point* X.

   (b) *Montrer que* L *est* C^2 *sur tout* $\mathbb{R}^m$. *Que vaut* $d^2L(X)$*?*

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *donnée par* $f(x, y, z) = x + 2y + z$, *et soit* S *l'ensemble*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 3z^2 = 3\}.$$

1. *Montrer que* f *admet un maximum et un minimum sur* S.

2. *Calculer ce minimum et ce maximum, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.*

Exercice 3. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est homogène de degré* m *si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x).$$

.

1. *Montrer que si* f *est homogène de degré* m *et de classe* C^1, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = mf(x)$$

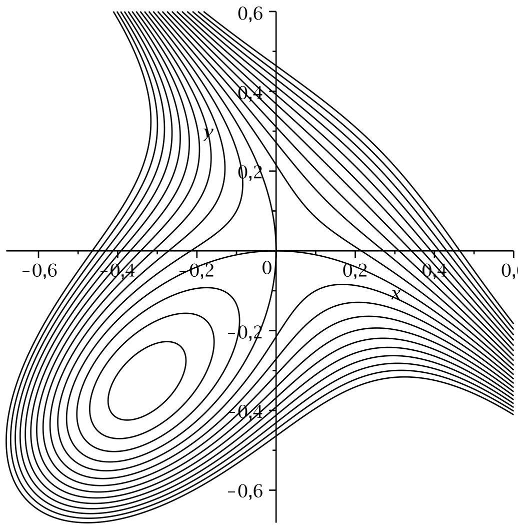
   Indication: dériver la relation définissant l'homogénéité par rapport à λ.

2. *Montrer que si* f *est homogène de degré* m *et de classe* C^2, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$Hess_x(x, x) = m(m-1)f(x)$$

3. *Montrer que réciproquement, si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on a* $\langle x, \nabla f(x) \rangle = mf(x)$, *alors* f *est homogène de degré* m.

Exercice 4. *Sur le dessin ci-dessous, on a tracé quelques courbes de niveau de la fonction* $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$.



1. *Le dessin semble indiquer qu'une des courbes de niveau a un point singulier en* $(0, 0)$. *De quelle courbe de niveau s'agit-il?*

2. *Calculer les points critiques de* f, *et préciser leur nature (point-col, extrema). Décrire les ensembles de niveau par ces points.*

3. *Pour quels* (x_0, y_0) *le théorème des fonctions implicite fournit-il une fonction* ϕ *définie sur un voisinage* I *de* x_0, *telle que* $\phi(x_0) = y_0$ *et*
$$x^3 + x\phi(x) + \phi(x)^3 = 0$$
sur I?

4. *Montrer que pour* x_0 *et* ϕ *comme dans la question précédente,* ϕ *est solution de l'équation différentielle*
$$(x + 3\phi^2)\phi'(x) = -\phi - 3x^2.$$

5. *Cette équation différentielle a-t-elle des solutions globales? a-t-elle des solutions qui explosent en un temps fini? (Justifiez vos réponses).*