Université Joseph Fourier — 2013-14
Calcul Différentiel — L3 option B

Partiel - 12 mars 2014

durée 2h

Exercice 1. *On considère le système $Y' = AY$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Soit P la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $M = P^{-1}AP$.*
2. *Calculer e^{tM} (où $M = P^{-1}AP$, comme dans la question 1).*
3. *Calculer e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.*
4. *Donner la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice 2. *On considère l'équation différentielle*

$$t^2 y'' - 2y = 0.$$

1. *Ecrire un système d'équations différentielles d'ordre 1 équivalent à cette équation.*
2. *Vérifier que la fonction $y_1(t) = t^2$ est solution de l'équation.*
3. *Démontrer que tout $t_0 > 0$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2y = 0 \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

   admet une unique solution, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. *Montrer qu'il existe une fonction $y_2(t)$ telle que toute solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ s'écrit*

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

   pour des constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. *Donner une expression explicite de y_2 (on pourra par exemple chercher y_2 sous la forme $y_2(t) = t^2 \varphi(t)$.*
6. *Montrer que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction Ct^2 est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} t^2 y'' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Ceci contredit-il le résultat du théorème de Cauchy-Lipschitz (justifier votre réponse)?

Exercice 3. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, on considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = t(t^2 + y\cos y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

1. *Montrer que le problème de Cauchy a une unique solution maximale, que l'on notera y_α.*
2. *Montrer que y_α est une fonction paire.*
3. *Montrer que y_α est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*
4. *Montrer que pour $\alpha = \pi$, y_α admet un maximum local en $t = 0$.*

Exercice 4. *On considère la courbe donnée par l'intersection de la sphère unité avec un cylindre vertical, dont la base est donnée par le cercle de rayon $1/2$ centré en $(1/2, 0, 0)$.*

1. *Ecrire une équation cartésienne pour la sphère unité et pour le cylindre mentionné ci-dessus.*
2. *Montrer que cette courbe peut łtre paramétrée par*

$$x(t) = \cos^2 t,\ y(t) = \cos t \sin t,\ z(t) = \sin t.$$

3. *Décrire le plan osculateur au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.*
4. *Montrer que l'abscisse curviligne peut être décrite par*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \cos(t)^2}.$$

   On ne demande pas de calculer cette intégrale.

5. *Calculer la courbure et la torsion en un point d'abscisse curviligne $s(t)$.*

On rappelle les formules suivantes pour la courbure et la torsion d'une courbe birégulière $\alpha : I \to \mathcal{R}^n$; si $s = s(t)$ désigne l'abscisse curviligne, on a:

$$\kappa(s(t)) = \frac{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}, \quad \tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{||\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)||^2}.$$